Математика для планирования экономики

Введение в кибер-социалистические вычисления

Математика для планирования экономики

Введение в кибер-социалистические вычисления

Издание первое: 2022

Версия: 1.2.1 (перевод на русский язык)

Перевод на русский язык выполнен независимым волонтером, не являющимся представителем CibCom

Замечания к переводу просьба направлять на электронный адрес translate4future@gmail.com

Издано и распространяется коллективом CibCom

www.cibcom.org

cibcomorg@gmail.com

Содержание

Цель данного руководства — помочь всем, кто интересуется техническими аспектами зарождающегося кибернетического коммунизма. До сих пор существовали либо вводные, либо, напротив, фундаментальные работы[1] по данной тематике, с огромной пропастью без “мостов” между ними. В CibCom мы стремимся преодолеть эту ситуацию; мы хотим дать руководство новичкам, которые решились погрузиться в (непонятные на первый взгляд) математические и компьютерные основы экономического планирования, но никогда не специализировались или не работали в этих дисциплинах какое-то время. Широкая публика может обращаться к документу, когда у нее возникают трудности с интерпретацией алгебраических идей или выражений в любом из этих материалов. Мы попытались сделать руководство наиболее всеобъемлющим, поскольку не хотели пропустить ни одно из объяснений, которые обычно принимаются как должное в трактатах по рассматриваемому предмету.

В любом случае, прежде чем перейти к тому, что привело нас сюда сегодня, не мешает вспомнить контекст, который на протяжении почти трех столетий являлся причиной настоящих исследований.

1 Введение

Социалистическое планирование экономики — флагман киберкоммунизма — является одним из способов организации и координации производства в современных обществах, характеризующихся высокоразвитым техническим разделением труда. Этому противостоит преобладающая сегодня рыночная экономика. Исторически она производит и воспроизводит в мире одну единственную реальность.

В капиталистическом обществе, характеризующемся частной собственностью на средства производства, отсутствует сознательная координация, а организация происходит на атомарном уровне (в компаниях). Капиталистическое планирование, несмотря на то, насколько оно было технологизировано в последние десятилетия, производится только внутри отдельных компаний и, что более важно, оно в основе своей ориентировано на ожидаемую прибыль. Между различными частными компаниями же нет не только гармоничного планирования - оно отсутствует как таковое.[2] Различные производственные единицы могут координироваться для удовлетворения потребностей лю-

[1] См. разнообразную литературу, в которой представлены оригинальные произведения Отто Нейрата, Василия Леонтьева, Леонида Канторовича, Оскара Ланге, Виктора Глушкова, Николая Ведуты, Стаффорда Бира, Пола Кокшота и Аллина Коттрелла, Яна Филиппа Дапприха, Спиридона Самотракиса, Томаса Хардина, и др.

[2] Самые стойкие защитники капитализма, австрийские экономисты, демонстрируя очевидный подлог, прямо отрицают саму *возможность* сознательной координации на общественном уровне. Согласно их рассуждениям, планирование (или решение проблемы распределения в обобществленной экономике) обязательно означало бы передачу роли принятия всех экономических решений в руки одной власти. Для этого эта власть должна быть всеведущей; то есть она должна иметь доступ к самой подробной экономической информации и знать, как лучше всего использовать каждый из миллионов ресурсов в экономике. Учитывая очевидную невоз-

дей только *a posteriori* (по результатам опыта) и в соответствии с логикой слепого и безличного рыночного автоматизма. Эти потребности (которые иногда являются самыми базовыми человеческими потребностями) будут удовлетворяться или не удовлетворяться исключительно в зависимости от уровня дохода каждого человека и наличия товаров, которые есть у каждой страны в глобальной цепочке поставок.

	Капиталистический рынок	**Социалистическое планирование**
Координация	Автоматическая, через конкуренцию	Сознательная, через политические институты
Экономические расчеты	Монетарные (денежные)	В натуральных единицах
Цель	Частная прибыль	Общественные потребности
Климатические ограничения	Представлены как нечто внешнее, нарушающее работу (отрицательные внешние эффекты)	Органично учитываются в самом процессе планирования
Трудоустройство	В соответствии с интересами капитала (структурная безработица)	В соответствии с индивидуальным желанием и общественными потребностями
Политическая форма	Парламентаризм/ Бюрократическое государство, отвечающее за обеспечение накопления капитала/ Военная диктатура	Прямая демократия/ Коммуны

Таблица 1: Таблица сравнения двух систем.

То, что апологеты капитализма продают нам как рациональную организацию производства, оказывается в корне проблемным, с катастрофической динамикой для человечества и окружающей среды. Многие черты нашей экономической реальности, такие как рецессии и крайнее неравенство доходов, являются необходимыми следствиями социальных производственных отношений и, таким образом, устойчивыми и существенными, а не случайными или преходящими, свойствами капитализма. Несмотря на прогнозы рыночных защитников, эти недостатки постоянно воспроизводятся и влекут за

можность существования такой власти, австрийцы предлагают в качестве единственного эффективного решения проблемы распределения децентрализованный механизм рынка [1].

собой огромные человеческие страдания.

Эта динамика является источником бесчисленных политических конфликтов. Социальная поляризация обостряется во время кризисов, постоянно пронизывая наше сосуществование. Неспособность осуществлять общественный контроль над раздробленной экономической деятельностью находит отражение в абсолютном бессилии «либеральных демократий» перед проектами и потребностями капитала. Одно только это дает достаточно оснований исследовать возможность сознательной и демократической организационной альтернативы. Однако, устранение угрозы жизнеспособности планеты, к которому ведет капитализм, является важнейшей задачей из всех из-за ее безотлагательности.

Наша планета имеет движущие силы, которые позволяют обновлять ресурсы, необходимые для поддержания любой формы жизни, но текущее производство товаров постоянно превышает ее биофизические пределы. В долгосрочной перспективе эта система представляет опасность для продолжения человеческой жизни. Изменение климата и ограниченность ресурсов только начинают проявляться. Наша текущая ситуация — это только прелюдия к тому, что грядет: первые кризисы дефицита, серьезные трудности для сельского хозяйства в нескольких районах планеты, увеличение выбросов парниковых газов, засушливость целых регионов, затопление других и т.д. [2]... Кроме того, многие ресурсы ежегодно тратятся впустую из-за производства большого количества товаров, которые невозможно обменять (продать). Перед нами встает глобальный вызов, с которым человечество когда-либо сталкивалось за свою короткую, но бурную историю. Это вызов, который рынок породил сам, но не в состоянии дать ответ на него, потому что настоятельная потребность в росте делает капитализм неспособным противостоять ему. В свете этой новой опасности поведение рынка становится еще более иррациональным и губительным.

Несмотря на все доказательства, экономисты, политики, интеллектуалы, социал-демократы, либералы и другие политические течения годами пытались найти решения, которые каким-то волшебным образом устранят негативные последствия рынка, не изменяя того, что они считают величайшим успехом капитализма, а именно накопления. Другими словами, они предлагают решить проблемы рынка, не изменяя его природу. Таким образом, им не нужно думать о трудностях преобразования экономической основы общества или признавать их. Мгновенные успехи рабочего движения полностью сходят на нет с распадом так называемого «государства всеобщего благоденствия». Безработица сохраняется, а социальные кризисы — в порядке вещей. Загрязнение окружающей среды продолжается, и переход на зеленую энергию идет не так, как планировалось. Капиталистическое накопление постоянно подвергается ограничениям. Недовольство поощряет политические силы, которые подрывают институты, лежащие в основе воспроизводства капитала.

Мы предлагаем устранить корень проблемы: мы предлагаем альтернативу - демократическое, сознательное и рациональное планирование экономики, чтобы мы могли противостоять этим и другим вызовам, а также свободно выбирать свою судьбу как общества. Может ли это быть утопической химерой, подобной той, которую нам еже-

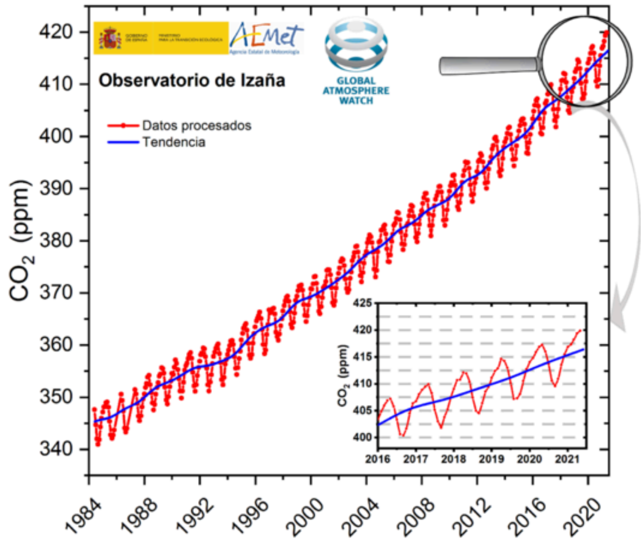

Рис. 1: Среднемесячная концентрация CO_2 (в ppm) (красная кривая) и тренд CO_2 (синяя линия)[3].

дневно продают великие капиталистические СМИ? Разве это уже не опробовали ранее с катастрофическими результатами? Планирование — не совсем новая концепция 21 века. Фактически, рабочее движение рассматривало плановую экономику как альтернативу капиталистическому беспорядку с 19 века. Эти идеи можно проследить в различных организационных и политических проявлениях нашего класса, особенно в Интернационалах I, II и III, и именно победа Октябрьской революции 1917 года позволила реализовать самый амбициозный в истории подход к экономическому планированию, осуществленный в Советском Союзе.

Советская экономика оказалась в крайне тяжелом положении в результате кровопролитной и разрушительной 5-летней гражданской войны. После короткого периода новой экономической политики с капиталистическими элементами контекст международной изоляции и необходимость быстрого промышленного развития заставили Советы попытаться рационально организовать национальную экономику, ориентированную на самодостаточность. Этот вызов был огромным: страна состояла из обширных территориальных образований, где капитализм был реализован лишь частично, а социальные отношения были более типичными для феодализма [4]. В первой пятилетке 1928 г. ставилась цель превратить преимущественно аграрную экономику в экономику с мощной базой тяжелой промышленности. На этом этапе советское общество переживало быстрый рост своего богатства: «Советский национальный доход в постоянных ценах 1928 года вырос более чем на 60 процентов» между 1928 и 1933 годами [4]. Экономическому планированию удалось сделать СССР мировой державой, несмотря на его очевидную изначальную отсталость и необходимость одновременного отражения нацистов в ходе одного из самых разрушительных вторжений в истории человечества. Однако после значительных достижений на этом первом этапе планирования вскоре возникнут проблемы в организации все более разнообразной и сложной экономики, такие как дефицит и пробелы в производственных цепочках, с которыми СССР сталкивался вплоть до его распада в 1990-х годах. Отчасти это произошло из-за несовершенных методов планирования, принятых в то время, из-за нехватки компьютерных мощностей. В результате неспособности эффективно обрабатывать экономическую информацию с помощью электронных расчетов советская система страдала от следующих трех проблем:

1. Поскольку планирующий орган не мог рассчитать, сколько прямого и косвенного труда будет стоить производство каждого товара, цены на эти товары в конечном итоге фиксировались на основе субъективных критериев («самый простой», «самый дешевый», «самый ненужный», самый дорогой и т.д.) [5, 6]. Таким образом, товары, которые было относительно трудно производить, продавались по ценам значительно ниже их себестоимости, что приводило к дефициту со стороны потребителей и несоответствиям в государственном учете. Более подробно этот момент обсуждается в Приложении 1.

2. Планирование основывалось не на фактическом спросе общества, а на планах производства сырья (тонны угля, железа и т. д.). Другими словами, конечные товары, потребляемые населением, не учитывались для определения необходимого количества сырья, а вместо этого оценивалось базовое количество сырья, которое далее поэтапно трансформировалось в промежуточную продукцию до тех пор, пока конечный продукт не достигал, когда это было возможно, конечного потребителя. Это привело к огромной трате человеческих и материальных ресурсов, что в конечном итоге и погубило Советы.

3. Вследствие вышеизложенного использование денег как расчетной единицы и способа платежа сохранилось. Это стало проблемой не только потому, что, как показали [7], [8] и [9], это естественным образом порождает неравенство и, следовательно, политические конфликты, несовместимые с реальной демократией, к которой мы стремимся, но также и из-за более фундаментального вопроса. Какую информацию предоставляют денежные выражения или рыночные цены? Самое большее, относительное количество труда, общественно необходимого для производства товара, и его относительную редкость [10]. Такие вопросы, как насколько производство товара загрязняет экологию, сколько времени требуется экосистемам для регенерации сырья или каков причиняемый вред рабочим при производстве, классифицируются как «отрицательные внешние эффекты», влекущие за собой систематическую потерю информации, которая наносит ущерб эффективной работе системы.

Неэффективность, вызванная недостатками некомпьютеризированного экономического планирования, проложила путь к постепенному восстановлению торговых процессов в СССР. Многочисленные достижения советского социализма были постепенно демонтированы, процесс, который начался с «Косыгинской реформы» и завершился перестройкой, привел к разрушению СССР и последующему установлению националистических и неолиберальных режимов, которые сегодня доминируют на постсоветском пространстве.

Однако в наши дни все вышеупомянутые проблемы могут быть довольно легко решены. Изучение таких проблем вкупе с технологическими инновациями сделало возможным создание беспрецедентной теоретической базы для экономического планирования в совокупности с прямой демократией и *расчетами в натуральных единицах*, которые выступают в качестве фундаментальных столпов. Вместо того чтобы сводить экономическую рациональность к одномерной переменной, такой как денежная прибыль, экономический учет в натуральных единицах, интегрированный в своего рода публичный плебисцит, позволяет органично использовать многомерные критерии, такие как научные рекомендации (экология, здравоохранение и т.д.) и этико-политические ценности (достоинство труда, межпоколенческая справедливость, интернациональная солидарность и др.) [11, 12]. С учетом изложенного, целью настоящего документа является введение в формальные выкладки новых методов экономической координации.

В частности, в этой статье рассматриваются три основные темы: матричные вычисления, оптимизация и вычислительная сложность. Эти три темы направлены на соответствующее решение задач *логистики* (как гарантировать, что мы производим не больше и не меньше, чем необходимо), *развития* (как обновить наше производство в связи с изменением социальной и технологической ситуации) и *выполнимости* (как убедиться, что вычисления выполняются в разумные сроки и с достаточным приближением).

Следует уточнить, что, придерживаясь "технических"задач планирования (т.е. математики и вычислений), мы намеренно опускаем все столь же необходимые политико-правовые требования для сознательной и демократической организации производства товаров и услуг. Это отдельная обширная тема, которую мы планируем затронуть в следующих статьях.

Давайте планировать!

2 Теория матриц

Читатель, вероятно, когда-либо задавался вопросом, через какие производственные процессы должен пройти товар, например сотовый телефон, прежде чем он попадет к нам домой в функционирующем состоянии. Как вы понимаете, это чрезвычайно сложный процесс; его производство включает в себя все этапы: от производства энергии и добычи полезных ископаемых до производства полупроводников и пластмасс.

Рынок не координирует все эти процессы как единое целое напрямую, однако, несмотря на свою атомарность, он способен связывать различные производственные единицы по всему земному шару для удовлетворения платежеспособного спроса. Основными механизмами, с помощью которых регулируется его социальный метаболизм, являются: 1) дисциплина, обеспечиваемая конкуренцией между компаниями, и 2) система цен и денежные потоки. Они и генерируемая ими обратная связь приводят к созданию сети сигналов и информационных потоков, способных косвенно включать общественные материальные затраты в денежную стоимость товаров.

Наша работа направлена на преодоление этих механизмов и достижение такой же или большей эффективности в организации производственного процесса. Поставим себя на мгновение на место комитета, назначенного для координации экономики в целом, в рамках параметров, которые определили граждане. Как правильно организовать распределение и производство ресурсов? Как решить *логистические проблемы снабжения и запасов* таким образом, чтобы не создавать дефицита при отсутствии конкуренции? Для этого необходимо понимать отношения между различными производственными единицами в научном ключе.

Следовательно, по крайней мере, должна быть возможность вычислить общественные затраты производства каждого вида благ непосредственно и точно, а не как результат действия законов, находящихся вне сознательного контроля людей. Чтобы добиться этого и уловить социальный метаболизм, теперь возможно использовать так называемую «технологическую матрицу». Благодаря этому математическому объекту мы сможем гораздо более строго, чем в советское время, узнать адекватную оценку каждого товара, а также количество ресурсов, необходимых для его производства. Но для того чтобы определить ее, мы для начала должны объяснить понятие матрицы и ее свойства.

2.1 Основные операции или: “Что такое матрица и как с ней обращаться?”

Матрица — это не что иное, как упорядоченный двумерный массив чисел, то есть набор чисел, расположенных в строках и столбцах. Формально матрица A с n строками и m

столбцами определяется как

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

или сокращенно $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}$. Обратите внимание, что $a_{i,j}$ — это просто число, занимающее i-ю строку и j-й столбец.

Чтобы узнать положение любого элемента в таблице, вам лишь нужно найти его строку и столбец. Сама по себе матрица ничего не значит, но это не значит, что мы не можем придать ей смысл. Матрицу с одной строкой и одним столбцом можно понимать как обычное число. С другой стороны, чтобы определить географическую точку на земном шаре, одного числа недостаточно, нужно как минимум два (широта и долгота), которые можно было бы представить матрицей с одной строкой и двумя столбцами (или с двумя строками и одним столбцом). Другим примером использования матриц, но с большим количеством строк и столбцов, чем раньше, может быть информация из каталога с 20-ю моделями автомобилей, классифицированными по 5-ти различным характеристикам (например, вес, высота, мощность двигателя, количество дверей и цена); информация может быть собрана в матрицу с 20 строками и 5 столбцами или с 5 строками и 20 столбцами, в зависимости от выбора читателя - нет никаких математических причин выбирать первое вместо второго. Однако первое более распространено в каталогах.

Очень особый вид матриц, широко используемых в нашей повседневной жизни, — это матрицы с одной строкой и двумя столбцами, потому что, как упоминалось ранее, они могут представлять точки на плоскости. Например, $\mathbf{p} = [1, 2]$ может быть точкой на плоскости, широта которой равна 1, а долгота – 2. Таким образом, точки могут быть представлены на карте. В общем, матрицы-строки — это матрицы с одной строкой, а матрицы-столбцы — это матрицы с одним столбцом. Эти типы матриц называются *строками* и *векторами-столбцами* соответственно. Другой вид своеобразных матриц — это те, которые имеют одинаковое количество строк и столбцов, они называются квадратными матрицами и обладают особо важными математическими свойствами.

Теперь, когда мы знаем, что такое матрица, давайте посмотрим, в каких операциях они могут участвовать.

2.1.1 Сложение матриц

Первая операция, которая приходит на ум, — это сложение матриц. Как мы можем определить эту операцию? Следующее определение сложения матриц требует, чтобы обе задействованные матрицы имели одинаковое количество строк и столбцов. Формально пусть A и B — матрицы вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \cdots & b_{n,m} \end{bmatrix},$$

тогда мы определяем сумму матриц A и B как

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} & \cdots. & a_{1,m} + b_{1,m} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} & \cdots & a_{2,m} + b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & a_{n,3} + b_{n,3} & \cdots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{bmatrix};$$

т. е. сумма матриц — это матрица, элементы которой в i-й строке и j-м столбце являются суммой соответствующих элементов A и B, занимающих соответствующую позицию. Чтобы это определение работало, матрицы должны быть одинакового размера, поскольку сумма матриц разного размера не дает значимых результатов (что вообще означает суммирование вектора с матрицей?). Суммирование двух (или более) матриц — это просто запись матрицы, элементами которой являются суммы элементов задействованных матриц “ячейка” к “ячейке”[3]. Заметим, что $A + B = B + A$, т.е. сложение матриц является коммутативной операцией. Аналогично можно определить вычитание матриц:

$$A - B := \begin{bmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & a_{1,3} - b_{1,3} & \ldots & a_{1,m} - b_{1,m} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & a_{2,3} - b_{2,3} & \ldots & a_{2,m} - b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} - b_{n,1} & a_{n,2} - b_{n,2} & a_{n,3} - b_{n,3} & \ldots & a_{n,m} - b_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Конкретным примером этой операции может быть

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3.1 & 9 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 4 & 3 \\ 0.1 & -11 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 6 \\ 3.2 & -2 & 35 \end{bmatrix}.$$

[3] Иногда матрица называется *таблицей*, которая содержит каждый элемент внутри *ячейки*. Этот специализированный тип особенно распространен в областях, связанных с информатикой.

2.1.2 Скалярное умножение матриц

Пусть w — любое действительное число, тогда мы определим скалярное умножение матрицы A на w следующим образом:

$$wA = Aw := \begin{bmatrix} wa_{1,1} & wa_{1,2} & wa_{1,3} & \cdots & wa_{1,m} \\ wa_{2,1} & wa_{2,2} & wa_{2,3} & \cdots & wa_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ wa_{n,1} & wa_{n,2} & wa_{n,3} & \cdots & wa_{n,m} \end{bmatrix};$$

т.е. умножаем содержимое каждой ячейки на скаляр w. Можно сказать, что когда матрица умножается на скаляр, который является не более чем постоянным числом (например, $w = 4$), мы буквально "масштабируем"всю матрицу на это число, отсюда и название. Обратите внимание, что, поскольку произведение двух действительных чисел коммутативно, скалярное умножение матрицы также является коммутативным.

2.1.3 Умножение матриц

Следующая операция между матрицами, которая приходит в голову, — это умножение или произведение матриц. Сложение матриц и скалярное умножение были определены по принципу "ячейка" к "ячейке", однако к умножению матриц такой подход НЕ применим.[4] Причина, по которой стандартное определение матричного умножения не следует этому правилу, может не быть очевидной на первый взгляд, однако это наиболее полезное определение из-за его связи с линейными уравнениями и отображениями.

Помните, что мы определяем операции между матрицами, гарантируя, что они правильно определены. Все может быть верно как определение, но полезность этих объектов и операций определяет то, что важно для математиков. Для математика нет смысла подвергать сомнению сами определения, они не доказаны, доказаны только их непротиворечивость и свойства. Прежде чем определять произведение матриц вообще, определим его для частных случаев. Определим произведение матрицы A с n строками и m столбцами на матрицу-столбец (вектор-столбец) x с m строками как:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + a_{j,3}x_3 + \cdots + a_{j,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \cdots + a_{n,m}x_m \end{bmatrix}.$$

[4]Хотя существует определение умножения матриц, которое работает таким образом, называемое продуктом Hamadar, который полезен в алгоритме JPEG.

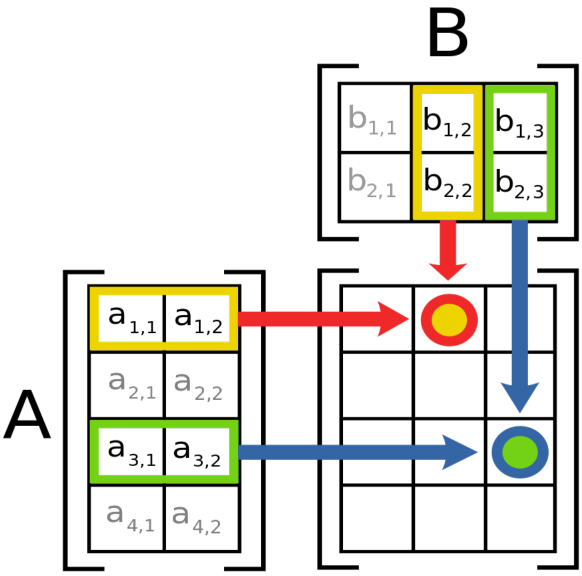

Рис. 2: Схематичное представление матричного произведения AB двух матриц A и B.

Не паникуйте! Метод очень прост: 1) взять первую строку матрицы и умножить ее на поэлементный вектор и сложить результат, 2) результат поместить в первую строку полученного вектора-столбца, 3) повторить операцию со следующими строками матрицы (но помещая результат в соответствующую строку результирующего вектора-столбца).

Конкретным примером произведения матрицы-вектора может быть

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.40 \\ 0.50 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 2 + 0.40 \cdot 3 \\ 0.50 \cdot 2 + 0.25 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.75 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы с n строками и m столбцами и вектор-столбца (имеющего ровно m строк) получается вектор-столбец с n строками.

Перейдем к определению матричного умножения в целом, частным случаем которого является матричное умножение на вектор. Пусть A — матрица из n строк и m столбцов, а B — матрица из m строк и p столбцов. Если мы напишем

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

и

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \cdots & b_{m,p} \end{bmatrix},$$

то мы определяем умножение A на B как матрицу из n строк и p столбцов как матрицу следующего вида

$$AB := \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,p} \end{bmatrix},$$

где $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j} + \ldots + a_{i,m}b_{m,j}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots., p$, т. е. элемент, занимающий i-ю строку и j-й столбец матрицы произведения, представляет собой сумму поэлементных произведений i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B. Заметим, что 1) для того, чтобы это определение имело смысл, количество столбцов, которое должно быть в A, и количество строк, которое должно быть в B, должно совпадать и 2) результирующая матрица имеет то же количество строк, что и A, и то же количество столбцов, что и B. Следовательно, если количество строк в A не совпадает с количеством столбцов в B, то BA определено некорректно, поэтому свойство коммутативности, вообще говоря, неверно. Однако можно спросить, если и A, и B имеют n строк и n столбцов, может ли $AB = BA$? В отличие от суммы матриц ответ отрицательный, в общем случае умножение матриц не коммутирует. Давайте рассмотрим пару простых примеров этого явления. В первом имеем

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot 10 + (-3) \cdot (-1) \\ 7 \cdot 0 + 5 \cdot 3 & 7 \cdot 10 + 5 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 23 \\ 15 & 65 \end{bmatrix},$$

в то время как

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 10 \cdot 7 & 0 \cdot (-3) + 10 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 7 & 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 50 \\ -1 & -14 \end{bmatrix}.$$

Или другой пример:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

тогда как

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Единичная матрица и обратная матрица

Определим n-мерную единичную матрицу

$$I_n := \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ столбцов}}$$

как квадратную матрицу, диагональные элементы которой (те, которые занимают ту же строку, что и столбец, т. е. элементы формы $a_{i,i}$) равны единицам, а все остальные элементы равны нулю. Обратите внимание, что единичная матрица I[5] проверяется таким образом, что $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для каждого вектора-столбца $\mathbf{x}$, отсюда и ее название.

Мы будем говорить, что C является обратной матрицей A, если выполняется

$$AC = CA = I \,. \tag{1}$$

Для матрицы A существует не более одной матрицы, удовлетворяющей первому равенству. Мы называем матрицу A^{-1}, для которой выполняется

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

обратной матрицей A. Действительно, если C_1 и C_2 удовлетворяют (2.1.4), то

$$C_1 = C_1I = C_1(AC_2) = (C_1A)C_2 = IC_2 = C_2$$

где мы учли, что $F(GH) = (FG)H$ для любых квадратных матриц F, G, H.[6] Кроме того, можно доказать, что если A^{-1} существует, то A является квадратной матрицей.[7] Кроме того, если A^{-1} и B^{-1} существуют, тогда $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

[5] Под I мы понимаем любую единичную матрицу с произвольным числом столбцов.

[6] Это свойство называется ассоциативностью и должно быть доказано. Арифметическое доказательство простое, но громоздкое. В качестве альтернативы вы можете доказать этот факт, воспользовавшись тем фактом, что матрица представляет собой линейную функцию, а умножение, как определено ранее, представляет собой композицию указанных линейных функций. Поскольку композиция функций тривиально удовлетворяет ассоциативности, то и умножение матриц [13, Chapter 9] тоже.

[7] В [14] вы можете обратиться к элементарному алгоритму для вычисления обратной матрицы A (если она существует) с использованием метода исключения Гаусса, используемого для решения систем линейных уравнений, который описан в разделе «Сложность», а ее вычислительная сложность объяснена и проверена.

2.1.5 Транспонирование

Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

мы определяем *транспонирование* матрицы A как

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix};$$

т.е. A^T образуется путем превращения строк матрицы A в столбцы и наоборот. Например, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

или если

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m],$$

то

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

2.1.6 Связь между решением систем линейных уравнений и обратными матрицами

Прежде чем закончить этот раздел, давайте рассмотрим взаимосвязь, которая существует между обратимыми матрицами и системами линейных уравнений с единственным решением.[8] Начав с особенно простого примера, рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{2}$$

[8] Также известная как непротиворечивая независимая система.

Как мы могли бы выразить эти отношения в матричной форме? Здесь нам пригодится определение матричного умножения, мы можем написать (2) как

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Положив $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, т.е. матрицу, строки которой являются коэффициентами системы линейных уравнений, и $\mathbf{c} = [1, 1]^T$, получим, что (2) можно представить как

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{c} .$$

Если мы решим (2), складывая первое и второе уравнения, мы получим, что $2x = 2$, следовательно, $x = 1$ и $y = 0$ являются нашим решением.

Есть еще один интересный способ решить эту задачу. Во-первых, применяя метод, описанный в [14] или в разделе 4.2, мы получаем, что $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$. С учетом $\mathbf{c}$, получаем $A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, что и является ранее полученным решением.[9] Это не совпадение. Рассмотрим общий случай только что продемонстрированного явления, чтобы пролить на него некоторый свет. Рассмотрим следующую систему n линейных уравнений с неизвестными $x_1, \dots, x_m$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = y_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = y_n \end{cases} \tag{3}$$

где $a_{i,j}, y_i$ заданы для всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$. Оказывается, (3) эквивалентно решению задачи нахождения вектор-столбца $\mathbf{x}$, такого что

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} , \tag{4}$$

где $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,m}$ и $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$. Обратите внимание, что если A^{-1} существует, то путем умножения слева по обе стороны от (4) следует, что $A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ и, таким образом, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ является решением (3) .

Этот метод решения систем может показаться слишком сложным или громоздким для использования вместо стандартного ручного символьного метода поначалу; но интересно отметить, что если вы изменили значения $y_1, \dots, y_n$ в (3), новую задачу не придется решать заново с нуля, так как можно воспользоваться тем фактом, что A^{-1} уже

[9] Более скептически настроенный читатель может убедиться, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

вычислено и нужно вычислить только одно произведение. Поэтому, если бы вам пришлось решать несколько систем с одинаковыми коэффициентами, вы, вероятно, сэкономили бы время, используя второй метод.

Другая причина использования второго метода заключается в том, что он позволяет получить решения (или их отсутствие) любой системы линейных уравнений за конечное число основных арифметических операций между коэффициентами $a_{i,j}$ и постоянными членами $y_1, \ldots, y_n$. Компьютеры не способны решать уравнения в символьном режиме, как это делаем мы, но они способны хранить матрицы и векторы и выполнять с ними операции *очень* эффективно.[10]

Теперь, когда мы разобрались с некоторыми матричными операциями, мы готовы взглянуть на некоторые важные приложения матриц (и линейной алгебры в целом) в экономической науке и, в частности, в экономическом планировании.

[10] См. BLAS.

2.2 Почему линейная алгебра важна для нашей работы?

Как обсуждалось ранее, система, использовавшаяся в СССР, имела как минимум два серьезных и неизбежных недостатка. Неспособность реагировать на эти проблемы привела к дискредитации плановой экономики, что во многом послужило бонусом для сторонников проведения капиталистически ориентированных реформ, которые только усугубляли проблемы и ухудшали качество жизни людей. Мы попытаемся проиллюстрировать, как современная математика, в частности матричная теория, дает ответ на оба описанных недостатка и как они служат фундаментом плановой экономики. В этом разделе наша цель состоит не в том, чтобы рассматривать социалистическое планирование во всей его сложности, а лишь в том, чтобы проиллюстрировать базовую математику, формирующую основу для дальнейших исследований.

Мы будем работать при определенных предположениях, которые мы обсудим ниже, чтобы упростить математическую обработку. Мы понимаем, что реальная экономика требует учета гораздо большего количества переменных, тем не менее, мы дадим некоторые ссылки и наблюдения о трактовке более тонких случаев.

Приведенный ниже метод основан и обобщает анализ, проведенный В. Леонтьевым, за что тот был удостоен Нобелевской премии по экономическим наукам (швед. *Sveriges riksbanks pris i ekonomisk vetenskap minne*) в 1973 году. Вдохновленный Франсуа Кенэ, Леоном Вальрасом, Карлом Марксом и советским планированием, В. Леонтьев разработал метод анализа эконоомики, называемый методом «Затраты-Выпуск», который кратко состоит в использовании матричной алгебры для описания межотраслевых отношений экономики в состоянии общего равновесия.[11] [12] Любой читатель, интересующийся первоисточниками, в которых Леонтьев описывает и использует свой мощный метод, может обратиться к [15], [16] и [17].

Предположим, что существует закрытая экономика (т. е. без связи с каким-либо внешним агентом) с m различными типами продукции, причем первые n типов продукции являются производственными товарами, используемыми для производства других товаров (дерево, сталь, промышленное оборудование и т.д.),[13] а остальные $m - n$ типов продукции являются потребительскими товарами, которые не используются для производства других товаров (шоколадный молочный коктейль, лекарства, бинты и т. д.). [14] Предположим, что:

(1) Каждый сектор производит только один вид товаров, поэтому внутриотраслевых промежуточных товаров нет.[15]

[11]Понятие общего равновесия неформально означает, что спрос и предложение всех видов продуктов совпадают.

[12]Интересно отметить, что В. Леонтьев работал с рынком цен, а не в величинах, независящих от сферы обращения, как мы сделаем ниже.

[13]Призводственные товары или товары для производства — это те, которые используются для производства других товаров.

[14]Потребительские товары или товары потребления — это те, которые не используются для производства других товаров.

[15]Это предположение нетрудно исправить, например, читатель может обратиться к [18].

(2) Рабочие не могут пройти обучение или образование ни для выполнения определенных работ, которые они могли бы выполнять, ни для максимизации своей производительности.[16]

(3) Все производственные фонды имеют одинаковую продолжительность жизни, которая считается единой. Износ тяжелого оборудования, заводской инфраструктуры и т.д. учитываться не будут.[17]

(4) Все виды товаров требуют одинакового времени производства, которое принимается за единицу времени.[18]

(5) Для каждого типа товара не существует различных технологий производства.

В то время как каждое другое предположение имеет некоторые обходные пути, последнее предположение особенно нереалистично и проблематично, вам достаточно посмотреть «Во все тяжкие», чтобы узнать, что вы можете производить любой конкретный товар разными способами. Различные методы могут быть выбраны на основе эффективности путем сравнения их *совокупных затрат труда* (определение приведено ниже)[19] и конечным количеством товара (представленным конечным спросом), которое должно быть произведено. В любом случае, этот ключевой вопрос выходит за рамки данной статьи. Читатель, интересующийся тем, как справиться с этим явлением, может обратиться к [22], [23], [24], где этот вопрос кратко обсуждается. Есть несколько авторов, таких как Томас Хардин и Дэвид Захария, которые глубоко изучают эти вопросы в настоящее время.

Пусть $a_{j,i}$ будет *количеством единиц* типа товара j [20] необходимого для производства единицы товара типа i [21] и ℓ_i *количество рабочих часов, необходимых* для сборки одной единицы товара типа i. Таким образом, продукция типа товара i характеризуется вектором $[a_{1,i}, ..., a_{n,i}, \ell_i]$, представляющим требуемые ресурсы и рабочие часы для сборки этих ресурсов для производства после определенного (производственного) периода одной единицы товара типа i. Количество труда, которое воплощает в себе еди-

[16]Читатель, заинтересованный в рассмотрении этого аспекта, может проконсультироваться [19, Глава 2].

[17]Заинтересованный читатель может прочитать [20] для получения дополнительной информации по этому вопросу. В [19] учитывается (неравномерный) износ машин, это не представляет большой трудности.

[18]См. [21], где это кратко обсуждается. Потребуется дальнейший анализ этого вопроса, так как это важная переменная помимо «интегрированных затрат на рабочую силу» и экологических соображений, которая почти не рассматривалась.

[19]Проницательный читатель может сказать, что один метод может быть более эффективным, чем другой, если выбранный набор методов для производства других видов товаров отличается, и он будет прав.

[20]Единицы $a_{j,i}$ являются заранее фиксированными физическими единицами. Например, если бы типом товара j был хлеб, мы использовали бы килограмм или грамм в качестве единицы измерения.

[21]После того, как экономика разбита по секторам, $a_{j,i} = \frac{z_{j,i}}{x_i}$, где $z_{j,i}$ — количество товаров, произведенных в секторе j, которые требуются сектору i (в капиталистической экономике единица $z_{j,i}$ и остальные переменные могут быть просто денежными) и x_i общее количество товаров, произведенных в секторе i. Это был бы практичный способ рассчитать $a_{j,i}$

ница товара типа i, представляет собой сумму прямого труда, затраченного на его производство, и труда, затраченного на производство используемых ресурсов или товаров. Обозначим эту величину через λ_i. Мы называем λ_i *совокупные затраты труда* (ILC - Integrated labour costs) i-го товара.[22] Далее мы рассмотрим, как можно рассчитать ILC для всех товаров. Начнем сначала с ILC производственных товаров.

Давайте теперь рассмотрим наглядный пример того, как это будет работать в простой экономике.

2.3 Упрощенный пример общинной экономики неандертальцев

Давайте представим, что мы принадлежим к племени неандертальцев в эпоху верхнего палеолита и хотим планировать экономику наших товаров: камней, палок и охотничьих рогов. Имеем следующую таблицу материальных затрат на реализацию каждого вида деятельности:

	Резьба по камню	Рубка деревьев	Охота на оленей
Камни	0.10	0.20	0.20
Палки	0.00	0.10	0.20
Рога	0.01	0.10	0.50

Эта таблица говорит нам, что для вырезания одной единицы камня нам нужно $0,10$ единиц камня, $0,00$ единиц палки и $0,01$ единицы рога. На первый взгляд это не кажется очевидным, например, из камней сделать другие камни? Рога, зачем? Если подумать об этом более внимательно, то для того, чтобы вырезать камни, вам нужны другие уже вырезанные камни, чтобы ударить их друг о друга (жесткие ударники), и вам нужны рожки и палки в качестве вспомогательных инструментов, чтобы закончить шлифовку камней (мягкие ударники).

Если мы присвоим индексы 1, 2 и 3 камню, палкам и рогам соответственно, $a_{1,1} = 0,10$, $a_{2,1} = 0,00$ и $a_{3,1} = 0.01$ для камней; и $a_{1,3} = 0,20$, $a_{2,3} = 0,20$ и $a_{3,3} = 0,50$ для рогов.[23] Все эти значения можно хранить в матрице, чтобы мы могли выполнять с ними некоторые вычисления, используя инструменты линейной алгебры.

[22] Многие авторы, например Анвар Шейх в [25] или Пабло Руис Наполес в [26], определяют это понятие по-другому, включая компенсацию заработной платы для анализа некоторых явлений международной торговли. В нашем тексте эта концепция будет эквивалентна тому, что они называют *вертикально интегрированными трудовыми коэффициентами*.

[23] $a_{j,i}$ далее будут называться техническими коэффициентами.

Матрицу A можно понимать как "рецепт" для производства каждого типа товара:[24]

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Каждый столбец матрицы можно понимать как ресурсы, необходимые каждой «отрасли», другими словами, *спрос* в рыночной экономике; в то время как каждую строку можно понимать как то, что каждый сектор предлагает другим, *предложение*.

Одна из представительниц неандертальского племени хочет выполнить общественный проект: она хочет сделать серию статуй, представляющих материнство и Богиню-Мать. Она утверждает, что ей понадобится 1 единица камня, чтобы завершить весь проект. Возникает вопрос: сколько каждого ресурса мы должны произвести, чтобы в конечном итоге мы произвели 1 единицу камня?

Дополнительное количество, которое мы хотим произвести, обычно называется конечным спросом и может быть представлено вектором конечного спроса $\mathbf{d}$, компонентами которого являются d_i - конечный спрос для каждого типа товара, в данном случае $\mathbf{d} = (1, 0, 0)^T$, потому что мы хотим произвести только одну конечную единицу первого товара (камень). Если бы мы хотели произвести две единицы камня и одну единицу рогов, конечный вектор спроса был бы равен $\mathbf{d} = (2, 0, 1)^T$.

Количество товаров, которое нам необходимо произвести, является неизвестным, и его необходимо рассчитать. Это неизвестное называется *общим объемом производства* и представлено вектором $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})^T$, где i – это тип товара, который мы хотим произвести в конечном итоге[25] в единицах ($i = 1$ для камня). Этот вектор хранит количества $x_j^{(i)}$ всех товаров j, необходимых для удовлетворения конечного спроса на товар i в системе связанных секторов. Будьте осторожны! Эти значения не следует путать со значениями a_{ji}, которые просто определяют количество ресурсов, необходимых для производства товара в определенном секторе.

Теперь, когда мы ставим задачу отдельно для каждого типа товара, сколько камня нам потребуется произвести? Столько, чтобы обеспечить производство самих взаимосвязанных секторов *плюс* одну единицу камня (для удовлетворения конечного спроса):

$$\underbrace{x_1^{(1)}}_{\text{Общий объем производства}} = \underbrace{a_{11}x_1^{(1)}}_{\text{Сектор 1}} + \underbrace{a_{12}x_2^{(1)}}_{\text{Сектор 2}} + \underbrace{a_{13}x_3^{(1)}}_{\text{Сектор 3}} + \underbrace{d_1}_{\text{Конечный спрос}}. \tag{6}$$

Прежде чем мы продолжим, давайте проанализируем слагаемые, присутствующие в уравнении (6). Мы видим, что, например, слагаемое $a_{12}x_2^{(1)}$ относится к количеству единиц камня, необходимых для производства одной единицы палок, умноженному на

[24] Матрица A далее будет называться "технологической матрицей".

[25] конечный товар означает количество товаров, которое мы получим после замены товаров, используемых в производстве.

количество единиц палок, необходимых для производства этой 1 конечной желаемой единицы камня. В нашем конкретном случае имеем, что

$$x_1^{(1)} = 0.1x_1^{(1)} + 0.2x_2^{(1)} + 0.2x_3^{(1)} + 1\ . \tag{7}$$

Аналогично получаем для палок и рогов следующую систему линейных уравнений:

$$x_1^{(1)} = a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} + 1\ , \tag{8}$$
$$x_2^{(1)} = a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + a_{23}x_3^{(1)} + 0\ , \tag{9}$$
$$x_3^{(1)} = a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_{33}x_3^{(1)} + 0\ . \tag{10}$$

В нашем конкретном случае имеем, что

$$\underbrace{\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{matrix}}_{\mathbf{x}^{(1)}} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 0.1x_1^{(1)} + 0.2x_2^{(1)} + 0.2x_3^{(1)} \\ 0x_1^{(1)} + 0.1x_2^{(1)} + 0.2x_3^{(1)} \\ 0.01x_1^{(1)} + 0.1x_2^{(1)} + 0.5x_3^{(1)} \end{matrix}}_{A\mathbf{x}^{(1)}} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{d}}\ . \tag{11}$$

Решив эту систему линейных уравнений, мы получили бы необходимое количество каждого ресурса, чтобы иметь возможность завершить общественный проект. В матричной форме имеем, что

$$\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}\ . \tag{12}$$

Учитывая метод, описанный в разделе 4.2 для вычисления обратной матрицы мы имеем, что

$$(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.12 & 0.31 & 0.57 \\ 0.01 & 1.16 & 0.47 \\ 0.02 & 0.24 & 2.10 \end{bmatrix},$$ [26]

и так наконец мы получаем, что

$$\mathbf{x}^{(1)} = (I-A)^{-1}\mathbf{d} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0.9 & -0.2 \\ -0.01 & -0.1 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.12 & 0.31 & 0.57 \\ 0.01 & 1.16 & 0.47 \\ 0.02 & 0.24 & 2.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12 \\ 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}.$$

где матрица $(I-A)^{-1}$ это *обратная матрица Леонтьева.*

[26] Более скептически настроенный читатель может убедиться, что действительно $(I-A)(I-A)^{-1} = (I-A)^{-1}(I-A) = I$.

Задача решена! У нас должно быть общее производство 1,12 единицы камня, 0,01 единицы палки и 0,02 единицы рога, чтобы произвести окончательную единицу камня. Этот результат отражает необходимость производить небольшое количество палок и рогов для этой коллективной работы. Но разве мы не решали ранее, что для вырезания камня не нужны палки? Все дело в том, что нам нужны рога, чтобы вырезать камень, а чтобы получить рога, нам нужны палки.

Предположим, что для обработки одной единицы камня требуется в среднем один час труда, для обработки одной единицы палки требуется в среднем два часа труда, а для охоты на одну единицу рогов требуется в среднем три часа труда. Тогда оказалось бы, что суммарные затраты труда на производство (ILC) [27] типа товара 1 (камень) будет (приблизительно) $1,12 \times 1 + 0,01 \times 2 + 0,02 \times 3 = 1,2$ рабочих часа. Таким образом, прямо или косвенно, для производства одной конечной единицы камня потребуется (приблизительно) 1,2 часа рабочего времени.

2.4 Общий подход к промышленной экономике

Как мы уже говорили, приведенное выше было бы примером упрощенной экономики, но на самом деле рассуждения не сильно меняются при масштабировании. Тот же метод можно использовать для решения логистических проблем экономики с миллионами различных товаров. Однако проиллюстрировать это можно только с помощью абстрактных математических обозначений, поэтому читателю придется "переварить" некоторые уравнения в этом разделе. Кроме того, в отличие от Леонтьева, мы разделили разработку на товары для производства и товары для потребления с целью обобщения, а также для того, чтобы иметь возможность разделить определенные операции в разных системах уравнений. Это основано на методах, описанных М. Морисима в [27].

2.4.1 Совокупные затраты труда на производство товаров для производства

Мы знаем, что для производства товара типа 1, необходимо $a_{1,1}, \dots, a_{n,1}$ единиц продукции $i = 1, \dots, n$ соответственно. Эти требуемые единицы также нуждаются в ресурсах для производства, а для этих новых ресурсов потребуются другие ресурсы и так далее. Мы должны "следить за цепочкой продукции" до тех пор, пока не останется непрямых ресурсов-продукции для их учета в производстве товара.

Учитывая взаимосвязь между обрабатывающими отраслями, можно ощутить, что увеличение на единицу конечного выпуска товара типа 1 производит «мультипликативный» или «каскадный» эффект на количество выпускаемых товаров всех типов, даже типа 1 (например, для производства электроэнергии необходимо минимальное количество электроэнергии). Чтобы получить общее количество производственных товаров $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$, необходимых для получения конечной единицы товара типа 1, приняв во внимание все вышеизложенное, мы должны решить следующую систему линейных

[27] Integrated labour costs (ILC) - совокупные затраты труда.

уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(1)} + 1 \\ x_2^{(1)} = a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(1)} + 0 \\ \vdots \\ x_n^{(1)} = a_{n,1}x_1^{(1)} + a_{n,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(1)} + 0 \end{cases} \tag{13}$$

После решения системы выше, ILC товара типа 1 определяется как

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(1)} .$$

Обозначение $\sum_{j=1}^{n} f(j)$ представляет $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$, где f - любая функция. То есть $\sum_{j=1}^{n} f(j)$ означает суммирование всех значений функции f в последовательных числах от нижней границы ($j = 1$) до верхней границы ($j = n$). Например, рассмотрим $f(j) = j$, $\sum_{j=1}^{3} f(j) = \sum_{j=1}^{3} j = 1 + 2 + 3 = 6$, то есть сумма последовательных чисел от 1 до 3. Символ $\sum$ называется суммированием.

Учитывая, что создание каждого из производственных товаров требует определенного периода времени, товары $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^{(1)}$, где $i = 1, \ldots, n$, должны быть доступны до начала этого периода, а $x_i^{(1)}$, где $i = 1, \ldots, n$, будут доступны в конце этого периода. При фактическом производстве товаров отрасли используют необходимые для производства товары, в то время как в конце периода они замещаются. Части конечного товара, оставшиеся после замены, называются конечными товарами. В настоящее время у нас есть только одна единица товара типа 1 в качестве конечного товара. Аналогично поступаем с товаром типа 2 для получения общего количества производственных товаров $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$, необходимых для получения единицы конечного товара типа 2. Приняв во внимание все следствия, мы должны решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(2)} + 0 \\ x_2^{(2)} = a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(2)} + 1 \\ \vdots \\ x_n^{(2)} = a_{n,1}x_1^{(2)} + a_{n,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(2)} + 0 \end{cases} \tag{14}$$

После решения ILC товара типа 2 определяется как

$$\lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(2)}.$$

Повторяя процесс аналогичным образом с другими видами производственных товаров, т. е. с типами i, равными $i = 3, \ldots, n$, мы получаем n систем уравнений, которые можно записать в виде матричной формы как:

$$X_I = A_I X_I + I \tag{15}$$

где

$$X_I = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \dots & x_n^{(n)} \end{bmatrix} ,$$

$$A_I = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} .$$

Как только (окончательные) выпуски $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ (i-й столбец X_I), необходимые для получения одной единицы (конечного выпуска) i-го типа выпускаемого товара определены, мы можем вычислить ILC i-го товара таким образом

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)} . \tag{16}$$ [28]

Матрица X_I — это *технологическая матрица*, элементы которой обычно называются *техническими коэффициентами* и показывают, сколько единиц в среднем требуется для производства одной единицы каждого товара. Давайте посмотрим на столбцы A_I, которые представляют требуемое количество (входы) каждого типа товара.

Если мы напишем $L_I = [\ell_1, \dots, \ell_n]$ и $M_I = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, то получим что

$$M_I = L_I X_I . \tag{17}$$

До сих пор мы рассчитывали ILC всех производственных товаров, теперь мы приступим к расчету ILC товаров потребления.

2.4.2 Совокупные затраты труда на производство товаров потребления

Производство товаров народного потребления можно разделить на два этапа; на первом этапе производятся необходимые производственные товары, а на втором этапе эти

[28] В [28] доказано, что эта процедура эквивалентна более интуитивной процедуре решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{1,1}\lambda_1 + a_{2,1}\lambda_2 + \dots + a_{n,1}\lambda_n \\ \lambda_2 = a_{1,2}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \dots + a_{n,2}\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n = a_{1,n}\lambda_1 + a_{2,n}\lambda_2 + \dots + a_{n,n}\lambda_n . \end{cases}$$

товары объединяются для получения конечных товаров потребления. Количество производственных товаров, необходимых для производства одной единицы товара потребления типа i (где $i = n+1, \ldots, m$), равно $a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}$, для замены этих производственных товаров, потребляемых в процессе производства, нам нужно $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ единиц продукции производства типа $j = 1, \ldots, n$ соответственно, которые определяются следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{(i)} = a_{1,1}x_1^{(i)} + a_{1,2}x_2^{(i)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(i)} + a_{1,i} \\ x_2^{(i)} = a_{2,1}x_1^{(i)} + a_{2,2}x_2^{(i)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(i)} + a_{2,i} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} = a_{n,1}x_1^{(i)} + a_{n,2}x_2^{(i)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(i)} + a_{n,i} \end{cases} \tag{18}$$

На первом этапе общество потребляет $\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)}$ часов труда, а на втором этапе общество потребляет ℓ_i часов труда. Следовательно, ILC товара потребления типа i равен $\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)} + \ell_i$.[29] Здесь мы выполнили процедуру для произвольного $i = n+1, \ldots, m$ типа товара. Приведя полученные уравнения к матричной форме, мы получим:

$$X_{II} = A_I X_{II} + A_{II}\ , \tag{20}$$
$$M_{II} = L_I X_{II} + L_{II}\ , \tag{21}$$

где

$$X_{II} = \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} & x_1^{(n+2)} & x_1^{(n+3)} & \ldots & x_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(n+1)} & x_n^{(n+2)} & x_n^{(n+3)} & \ldots & x_n^{(m)} \end{bmatrix},$$

$$A_{II} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,n+1} & a_{2,n+2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,n+1} & a_{n,n+2} & \ldots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

и $M_{II} = [\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_m]$, $L_{II} = [\ell_{n+1}, \ldots, \ell_m]$. Заметим, что X_{II} — матрица с n строками и $m-n$ столбцами.

Теперь, если вместо того, чтобы производить конечную единицу i–го производственного товара, мы хотим произвести d_i конечных единиц товара i–го типа, где $i = 1, \ldots, n$,

[29] В [28] доказано, что эта процедура эквивалентна более интуитивной процедуре решения следующей системы линейных уравнений;

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} = a_{1,n+1}\lambda_1 + a_{2,n+1}\lambda_2 + \ldots + a_{n,n+1}\lambda_n \\ \lambda_{n+2} = a_{1,n+2}\lambda_1 + a_{2,n+2}\lambda_2 + \ldots + a_{n,n+2}\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_m = a_{1,m}\lambda_1 + a_{2,m}\lambda_2 + \ldots + a_{n,m}\lambda_n \end{cases} \tag{19}$$

то нам потребуется соответственно $x_1, \ldots, x_n$ единиц каждого вида продукции, которые определяются

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Общий выпуск}} = \underbrace{A_I\mathbf{x}}_{\text{Промежуточное потребление}} + \underbrace{d}_{\text{Конечный выпуск}} \iff (I - A_I)\mathbf{x} = \mathbf{d}\,,$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Следовательно, если $(I - A_I)^{-1}$ существует (эта матрица называется *обратной матрицей Леонтьева*),[30] [31] тогда

$$\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1}\mathbf{d}\,.$$

Если вместо производства конечной единицы i–го товара потребления мы хотим произвести d_i конечных единиц i-го типа товара с $i = n+1, \ldots, m$, то нам потребуется соответственно $x_1, \ldots, x_n$ единиц каждого вида продукции, которые определяются уравнениями

$$\mathbf{x} = A_I\mathbf{x} + A_{II}\mathbf{d} \quad \iff \quad (I - A_I)\mathbf{x} = A_{II}\mathbf{d}$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{n+1} \\ d_{n+2} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если $(I - A_I)^{-1}$ существует, то $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1}A_{II}\mathbf{d}$.

[30] Исследование достаточных условий существования такой матрицы $(I - A_I)^{-1}$, что вектор $x = (I - A_I)^{-1}d$ имеет все неотрицательные элементы, выходит за рамки статьи. Читатель, интересующийся вопросами, связанными с вышеуказанными проблемами, может обратиться к [28, Глава 2] и [27].

[31] При определенных технических условиях (читатель может обратиться, например, к [29, стр.351]) относительно A_I, которые обычно выполняются в экономике, следует, что $(I - A_I)^{-1} = I + A_I + \ldots + A_I^q + A_I^{q+1} + \ldots$ (здесь появится предел, но определение его, строго говоря, выходит за рамки статьи, вместо этого читатель может интерпретировать его как «бесконечную сумму»). Фактически, если $A_I^{q+1} = 0$, то $(I - A_I)^{-1} = I + A_I + \ldots + A_I^q$. Эти равенства действительно интересны, они не только дают нам альтернативные способы вычисления $(I - A_I)^{-1}$, но и позволяют нам придать точный экономический смысл обратной матрице Леонтьева. Достаточно понять, что $A_I\mathbf{x}$ — это ресурсы, необходимые для производства x_i единиц товара типа i с $i = 1, \ldots, n$, $A_I^2\mathbf{x}$ — это ресурсы, необходимые для производства ресурсов, необходимых для производства x_i единиц товара типа i, где $i = 1, \ldots, n$, и т. д., тогда $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1}\mathbf{d}$.

Теперь мы ясно видим основную стратегию нашего экономического планирования. Зафиксировав вектор d, представляющий конечное количество товаров каждого типа, которые мы хотим произвести, мы вычисляем, сколько всего единиц каждого типа производственного товара x нам нужно произвести. Таким образом, мы можем избежать двух основных проблем Советского Союза, описанных ранее во введении, без необходимости использовать денежную единицу для описания потоков рабочей силы.[32] [33] Конечно, оценка d также является вызовом, хотя и гораздо меньший вызовом, чем может показаться на первый взгляд, и тем более с сегодняшними технологиями, которые позволяют нам иметь механизмы обратной связи в режиме реального времени. Эта проблема широко обсуждается в [19].

[32]Хотя получение обратной большой матрицы является относительно дорогостоящим процессом (поскольку количество операций не растет линейно с количеством строк, как мы доказываем в разделе 4), читатель должен иметь в виду, что:

1. Матрицы A_I и A_{II} не являются произвольными матрицами. С одной стороны, их размер зависит от уровня детализации экономики по видам статей (или секторам). С другой стороны, чем больше она детализирована, тем более разреженными становятся матрицы (т. е. в матрице больше нулевых элементов). Разреженные матрицы представляют собой особый вид матриц, которыми легко управлять. Кроме того, общий объем товаров в реальной экономике всегда будет значительно меньше, чем общая численность населения.
2. Нам не нужно ничего точно вычислять. Нам нужны только итерационные методы, дающие приближенные решения с желаемой точностью. Ответственная за это область математики называется численным анализом, и это была одна из самых плодотворных областей прикладной математики в прошлом веке, особенно с развитием вычислительной техники. Читатель, интересующийся инструментами этого типа, может обратиться к [30—34].

[33]Если бы предметы личного потребления в общественных магазинах покупались за их эквивалент ILC в трудовых жетонах, проблема, описанная в Приложении 1, исчезла бы.

3 Оптимизация

Описанные ранее вычисления сняли бы многие сомнения относительно функционирования кибер-социалистического планирования, но в условиях сложной экономики возникает больше проблем, которые необходимо учитывать.

Для конкретного агропромышленного комплекса всегда мыслимы различные пути решения одной и той же проблемы, задачи или производственной задачи, каждый из которых дает частично или полностью различные результаты. Мы имеем в виду альтернативные варианты, когда речь идет о выборе технологий, распределении рабочей силы, транспорте и/или маршрутах доставки и т.д. Возьмем простой пример: обработка земли. Априори можно подумать, что вспашка поля трактором более эффективна, чем использование ручных орудий. Но если подумать более внимательно, эта дихотомия нереалистична. Тракторы не просто падают с неба. Их тоже необходимо производить, и можно придумать сценарии, при которых было бы неразумно начинать сборку тракторов. Этот пример максимально прост, но при наличии некоторого воображения нетрудно понять, что многие вызовы этого века будут связаны с ситуациями такого рода: как нам осуществить переход к постуглеродной экономике? Вкладывать ли нам миллионы и миллионы человеко-часов в экспериментальную энергетику, которая через несколько лет могла бы решить энергетическую проблему на века, или же необходимо перестраховываться и просто комбинировать, насколько возможно, существующую?[34]

В любом случае эти проблемы можно обобщить как попытку максимизировать или минимизировать определенные количества при определенных ограничениях. Среди прочего, можно попытаться минимизировать количество рабочих часов, необходимых в опасном и/или неприятном секторе, или количество CO_2, выбрасываемого для производства определенного продукта. Что ж, благодаря вкладу экономиста и математика Леонида Канторовича, [35] мы знаем, что большинство этих задач можно смоделировать математически в так называемых *задачах оптимизации*. Формализация и решение этих задач с учетом имеющихся ресурсов дает нам четкое представление о том, как эффективно обновлять нашу экономику.

Напомним, что было сказано в разделе 1. В рыночной экосистеме общественные потребности перекрываются законом прибыльности; эти потребности интерпретируются как возможности для получения прибыли, подчиняя этой цели все технические инновации нашего коллективного знания. Эта динамика чрезвычайно произвольна и порождает бесконечные проблемы (перепроизводство ненужных, но прибыльных продуктов, дефицит других необходимых, но невыгодных, кризисы и т.д.), но... неужели нельзя поступить по-другому? Разве не интуитивно понятно, что механизмы оптими-

[34]Это не следует путать с упомянутой в предыдущей главе проблемой расчета совокупных затрат труда для товара, который производится *одновременно* разными способами. Теперь вопрос состоит в том, чтобы выбрать из множества *возможных* инициатив *наилучшую*.

[35]Канторович также был удостоен Нобелевской премии в области экономических наук в 1975 году.

зации, используемые сегодня Amazon или Walmart[36] на уровне компании, могут быть использованы в целях освобождения даже более эффективно путем социализации всех компаний и отмены существенного ограничения сокрытия информации друг от друга?

В этой главе мы увидим, как можно использовать математическую оптимизацию в демократически планируемой экономике, чтобы обеспечить максимально возможную производительность наших инфраструктур. Как объяснялось в других работах [36] [37], это не означает, что все наши государственные предприятия должны использовать одни и те же производственные технологии. Существует огромное пространство для инноваций и экспериментов, но эта тема выходит за рамки данной статьи. Давайте теперь сосредоточимся на идее оптимизации.

3.1 Математическая оптимизация

Первым шагом в моделировании задачи оптимизации является определение *целевой функции* для максимизации или минимизации. Математически говоря, нам нужно найти функцию $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (любое число), а $\mathcal{A}$ обычно является подмножеством n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Последнее может показаться немного сложным, но его легко понять на примере. В повседневной жизни мы все привыкли к трем измерениям (ширина, высота и длина). Или даже 4 измерениям! Если мы слышали об Альберте Эйнштейне... Что ж, эти 3 измерения представляют собой евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. С другой стороны, $\mathcal{A}$ является подмножеством этого пространства, т. е. все элементы $\mathcal{A}$ принадлежат $\mathbb{R}^3$, поэтому графически это будет ограниченная часть этого пространства. Например, сфера была бы подмножеством евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Наконец, осталось только распространить математику, используемую для $\mathbb{R}^3$, на n измерений. Точки в $\mathbb{R}^3$ задаются 3-мя координатами, т.е. представляют собой не что иное, как упорядоченные тройки (3-кортежи или 3-наборы) действительных чисел. Аналогично, точки в $\mathbb{R}^n$ — это не что иное, как $n-$наборы действительных чисел, т.е. каждая точка в $\mathbb{R}^n$ определяется n упорядоченными числами. Надеюсь, это покажется читателю знакомым, поскольку элементы $\mathbb{R}^n$ — это в точности векторы-строки или векторы-столбцы с n столбцами или n строками соответственно, представленные в разделе 2.

Этот последний шаг прост, но его трудно представить, поскольку никому еще не удавалось наблюдать объект более чем в трех измерениях. Однако в математике это вполне возможно. В экономике размер n имеет более осязаемое значение, поскольку он относится к n типам продуктов, производство которых необходимо оптимизировать, например, представляя единицы каждого типа продукта, которые будут использоваться в определенном задании.

Подмножество $\mathcal{A}$ будет определяться *ограничениями* задачи. Формально точками $\mathcal{A}$ будут $n-$наборы чисел, которые будут проверять определенные неравенства и/или

[36] Вы можете прочитать об использовании этих методов в данных корпорациях в главе 4 [35].

равенства. Например, эти ограничения могут исходить из ограничений на общее количество рабочих дней или общее количество генерируемых тонн CO_2.

На данный момент мы уже знаем все ингредиенты, необходимые для описания задачи оптимизации, т.е. целевую функцию и ограничения. Оптимизация — это очень широкая область математики, которая включает в себя множество различных методов в зависимости от конкретных характеристик решаемой задачи. В этой статье мы сосредоточимся на *линейном программировании*. Как видно из названия, это относится к задачам оптимизации, состоящим только из линейных функций. Раздел 3.2 представляет подробное описание и применение линейного программирования к экономическим задачам. Однако с некоторыми аспектами экономики, такими как эффект масштаба, нельзя справиться с помощью линейного программирования, потому что либо целевая функция нелинейна, либо отношения, определяющие ограничения, нелинейны. Этот аспект обсуждается более подробно в разделе 3.3.

3.2 Линейное программирование

Линейные отношения между переменными — это отношения, сохраняющие пропорции. Следовательно, линейная функция f, определенная на $\mathbb{R}^n$, переводит линейные комбинации векторов x, y в линейные комбинации $f(x)$, $f(y)$, с одинаковыми константами пропорциональности, формально мы будем говорить, что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является линейной, если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и для каждого x, y в $\mathbb{R}^n$. Эти функции выглядят, например, как прямая линия на плоскости или как плоскость в $\mathbb{R}^3$. Эти типы функций очень удобны для компьютеров и обладают интересными свойствами.

Задачи линейного программирования обычно представляются в литературе в следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{при условии:} \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{22}$$

где $\mathbf{c}^T$ — вектор-строка $1 \times n$, $\mathbf{x}$ — вектор-столбец $n \times 1$, $\mathbf{A}$ — матрица $m \times n$ и $\mathbf{0}$ — вектор-столбец $n \times 1$, элементы которого состоят только из нулей.

В предыдущей задаче делается попытка максимизировать (линейную) функцию $\mathbf{x} \to \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ с учетом определенных ограничений, которые мы объясним ниже.[37]. Два очевидных

[37]Как мы заявили в ссылке 6 каждое линейное приложение может быть представлено функцией вида $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$, являющейся A некоторой матрицей. Следовательно, в приведенной выше задаче целевой функцией может быть любая линейная функция

ограничения, выраженные в матричной записи, на самом деле соответствуют множеству отдельных ограничений. Поэтому нам удобно использовать матричные обозначения в задачах этого типа.

Как мы видели в разделе 2, когда было введено понятие произведения матрицы на вектор, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ представляло бы m неравенств, поскольку матрица A имеет размерность $m \times n$, где n — количество переменных в нашей задаче. Ограничения m могут относиться, например, к различным затратам в производственном процессе, отработанным часам, используемому оборудованию... Нам нужно помнить, что ограничения всегда будут иметь значение в реальном мире. Второе ограничение довольно распространено и гарантирует, что переменные вектора $\mathbf{x}$ не принимают отрицательных значений, чтобы избежать решений, которые не имеют смысла в реальном мире, таких как производство отрицательного количества транспортных средств.

Давайте теперь попробуем решить конкретную задачу с помощью инструментов, которые у нас есть. Похоже, что на последнем плебисците по декарбонизации экономики граждане решили придать большее значение велосипеду как средству передвижения. В отличие от капиталистической экономики, нет необходимости ждать корректировки спроса и предложения или того, что какой-то капиталист обнаружит рыночную возможность; результат плебисцита может быть реализован напрямую в общем секторе производства велосипедов.

Учитывая велосипедный завод, который производит горные велосипеды (x_1) и электрические велосипеды (x_2), цель завода состоит в том, чтобы максимизировать свое производство, принимая во внимание, что покупки электрических велосипедов, как ожидается, будут в два раза выше, чем горных велосипедов, так как первые гораздо удобнее для поездок на дальние расстояния на работу. Эти типы предпочтений могут быть отражены в целевой функции с помощью вектора $\mathbf{c}^T = [1 \quad 2]$, в результате чего целевая функция $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = x_1 + 2x_2$. Другими словами, электрические велосипеды имеют более высокий функциональный вес и поэтому будут иметь приоритет в производстве.

Еженедельные поставки на завод составляют 60 кг стали и 180 кг алюминия. Для производства каждого горного велосипеда требуется 1 кг стали и 4 кг алюминия, а для производства электрических велосипедов требуется 2 кг стали и 2 кг алюминия. Это приводит к ограничениям для стали (уравнение (23)) и алюминия (уравнение (24)), поскольку производство никогда не может превышать количество сырья, необходимого для их производства. Наконец, необходимо учитывать рабочее время, требуемое для производства каждого велосипеда. Фабрика состоит из 4 сотрудников, работающих по 35 часов в неделю, и каждый из них тратит 3 часа на изготовление горного велосипеда и 4 часа - на электрического (уравнение (25)).

$$1x_1 + 2x_2 \leq 60 \tag{23}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 180 \tag{24}$$

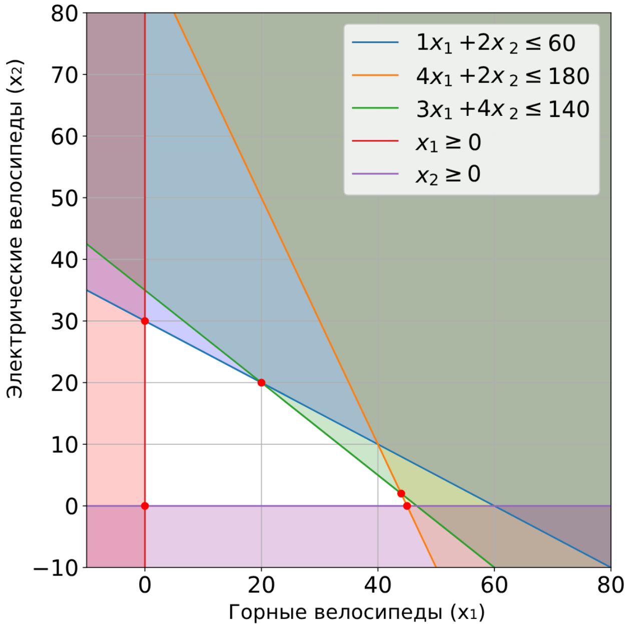

Рис. 3: Допустимая область задачи оптимизации представляет собой многогранник. Разноцветные плоскости соответствуют ограничениям стали (синий), алюминия (оранжевый), рабочих часов (зеленый) и неотрицательности решения (красный и фиолетовый) соответственно.

$$3x_1 + 4x_2 \leq 140 \tag{25}$$

Уравнение (26) показывает ограничения в матричной форме. Заметим, что последние две строки матрицы A и вектор $\mathbf{b}$ обеспечивают неотрицательность числа велосипедов.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 180 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Допустимая область показана на рисунке 3, где заштрихованные области представляют пространство, в котором ограничения не выполняются. Между пересечениями всех ограничений остается многогранник (белая область на рисунке) такой, что любая точка внутри этого многогранника удовлетворяет всем ограничениям. Можно показать, что точка, максимизирующая (или минимизирующая) целевую функцию, должна быть одной из вершин этого многогранника, так что любой алгоритм, стремящийся найти максимум (или минимум) целевой функции, должен вычислять ее во всех или некоторые из этих вершин для решения задачи. Одним из наиболее известных алгоритмов, решающих эту проблему, является симплекс-метод.

3.2.1 Симплекс-метод и его применение

Далее мы сформулируем, интуитивно и не вдаваясь в детали вычислений, как работает *симплекс-метод* - метод, обычно используемый для решения задач линейного программирования.

Чтобы его понять, достаточно знать две характеристики задачи: одна относится к ограничениям, а другая к целевым функциям.

Во-первых, это конкретная форма допустимой области, в которой решения удовлетворяют требованиям, налагаемым ограничениями. Это выпуклый многогранник (двумя примерами являются куб или додекаэдр - двенадцатигранник, хотя допустимые области не обязательно должны быть только трехмерными или правильными).[38]

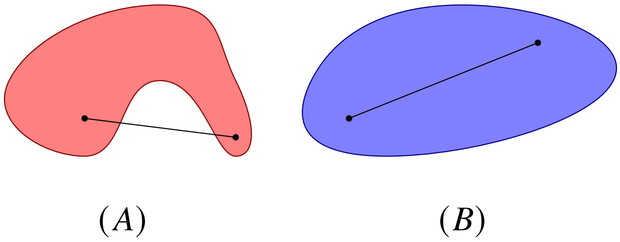

Рис. 4: Наглядный пример невыпуклого множества (A) и выпуклого множества (B).

Второй особенностью задачи является то, что целевая функция, будучи также линейной функцией, упорядочивает пространство решений, разбивая их на прямые, плоскости или гиперплоскости (т. е. расширение понятия более чем на 3 измерения), в которых функция имеет такое же значение (см. рисунок 6).

С учетом вышеизложенного, идея состоит в том, чтобы увеличить (или уменьшить) целевую функцию. Для этого мы будем двигаться вверх (или вниз) в направлении, перпендикулярном этим плоскостям. Эти два результата вместе приводят нас к следующему выводу: оптимальные решения могут быть только в одной вершине или в нескольких (вместе с точками между ними: ребром или гранью многогранника). Это можно изобразить в 3D, положив многогранник на стол на одну или несколько точек и найдя самую высокую точку: интуитивно мы видим, что это действительно будет вершина (или несколько).

[38] Прежде чем продолжить, помните, что математически множество является выпуклым тогда и только тогда, когда для любых двух точек множества, которые мы берем, соединяющий их отрезок содержится в указанном множестве.

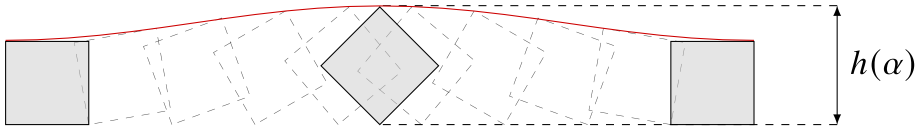

Рис. 5: Наглядный пример возможных максимумов простого выпуклого многогранника (квадрата), где $h(\alpha)$ — высота как функция угла наклона. Высшие точки являются либо вершиной, либо ребром.

Поскольку мы заинтересованы в поиске оптимального возможного решения, нам все равно, есть ли еще несколько, главное — найти одно из них. Что делает предыдущий результат важным, так это то, что наш оптимум будет находиться в некоторой вершине. С учетом этого условия был разработан алгоритм, использующий этот результат: симплекс-метод. Применение метода производится в три этапа: 1) инициализация, 2) цикл и 3) завершение.

1. Алгоритм инициализируется взятием любой вершины. Из этой точки мы анализируем его соседние вершины (соединенные с ним ребром) и вычисляем, в каких из них целевая функция имеет большее значение (если мы максимизируем).

2. Затем мы переходим к этой новой вершине и повторяем процесс. Всегда увеличивая значение целевой функции, мы в конечном итоге достигнем оптимальной вершины.

3. Это подтверждается проверкой того, что его соседние вершины имеют меньшее значение целевой функции. Достигнув оптимального допустимого решения, симплекс-метод завершается.

Освоив симплекс-метод, мы можем применить его к вышеуказанной задаче оптимизации производства велосипедов, чтобы получить ее решение. Вершины многогранника, соответствующего допустимой области, отмечены красными точками на рисунке 3. Эти вершины являются точками, в которых пересекаются плоскости, образующие ограничения. Например, чтобы получить точку пересечения ограничений $x_1 \geq 0$ и $1x_1 + 2x_2 \leq 60$, необходимо решить только систему уравнений, образованную двумя ограничениями. Другими словами, мы подставляем $x_1 = 0$ первого ограничения в уравнение $1x_1 + 2x_2 = 60$, чтобы получить точку отсечки $(x_1, x_2) = (0, 30)$. Действуя аналогично с остальными ограничениями, получаем список вершин $[(0,0), (0,30), (20,20), (44,2), (45,0)]$. Читателю достаточно подставить каждую из этих точек в целевую функцию $x_1 + 2x_2$, чтобы найти ее максимум, который в данном случае равен 60. Интересно отметить, что этот максимум может быть достигнут в двух разных вершинах (т.е. при $(x_1, x_2) = (0, 30)$ и $(x_1, x_2) = (20, 20)$). В принципе, оба решения нашей задачи могли бы быть правильными, и окончательное решение могло бы быть принято либо случайным образом (например, подбрасыванием монетки), или на основе координации в отраслевом масштабе (может случиться так, что спрос на горные велосипеды не будет удовлетворен, если выбрать $x_1 = 0$).

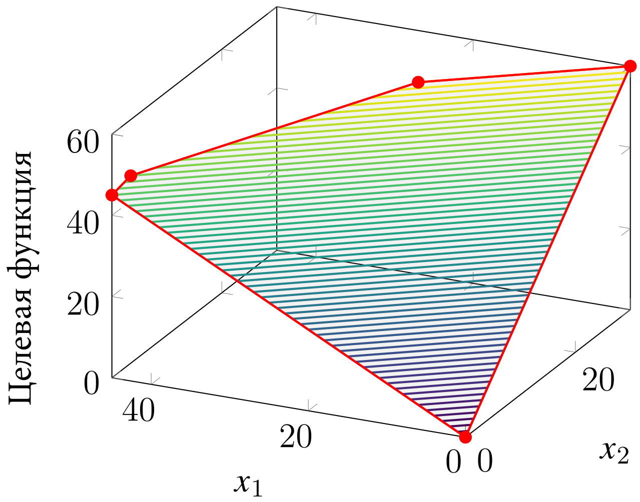

Рис. 6: Значения целевой функции в допустимой области, представленной областью, ограниченной красными линиями. Обратите внимание, что функция имеет постоянное значение на заштрихованных линиях внутри многоугольника (меньшее значение фиолетовое, большее значение желтое).

Читателю, интересующемуся формализмом, на котором основан этот алгоритм, мы рекомендуем обратиться к соответствующей литературе [38].

Давайте посмотрим на примерах, насколько универсальна линейная оптимизация. Для этого убедимся, что большое разнообразие задач — в нашем случае экономических — на самом деле являются задачами линейного программирования в той или иной форме и, следовательно, могут быть решены такими методами, как симплекс-метод, описанный ранее.

3.2.2 Исторический пример из Центральной лаборатории Фанерного треста

Мы рассмотрим пример, фактически основанный на реальной задаче, поставленной Л. Канторовичу Центральной лабораторией Фанерного треста в 1939 г. (описанной в [39]). Проблема состояла в том, чтобы максимизировать производство различных пород древесины в определенных пропорциях, используя определенные станки. У них было 8 станков для производства пиломатериалов и 5 различных типов пиломатериалов. Требовалось, чтобы 10%, 12%, 28%, 36% и 14% конечного продукта были из первого, вторго, третьего, четвертого и пятого типа древесины соответственно. Пусть p_k — доля древесины типа k, которую необходимо произвести, в нашем случае: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,12$, $p_3 = 0,28$, $p_4 = 0,36$ у $p_5 = 0,14$. Обозначим через $\alpha_{i,k}$ количество единиц древесины типа k, произведенных за рабочий день на станке i, а через $h_{i,k}$ время, выраженное как часть рабочего дня, которую мы собираемся использовать станок i для производства древесины типа k. $\alpha_{i,k}$ – это данные, известные Центральной лаборатории, отражающие производительность станков при производстве различных пород древесины. Эти данные были, в частности, следующими:

Станок номер	Вид пиломатериала				
	1	2	3	4	5
1	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	6,0	9,0	14,0	17,0
8	5,0	7,0	10,0	14,8	18,0

Таблица 2: $\alpha_{i,k}$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Задача состоит в том, чтобы получить $h_{i,k}$, где $i = 1, \ldots, 8$ и $k = 1, \ldots, 5$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $h_{i,k} \geq 0$.[39]

2. $\sum_{k=1} h_{i,k} = 1$.[40]

3. $\frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{8} h_{i,1}\alpha_{i,1} = \frac{1}{p_2} \sum_{i=1}^{8} h_{i,2}\alpha_{i,2} = \frac{1}{p_3} \sum_{i=1}^{8} h_{i,3}\alpha_{i,3} = \frac{1}{p_4} \sum_{i=1}^{8} h_{i,4}\alpha_{i,4} = \frac{1}{p_5} \sum_{i=1}^{8} h_{i,5}\alpha_{i,5}$ и чтобы это общее значение являлось максимальным.[41]

Решение вышеуказанной задачи с применением симплекс-метода состоит в следующем:

[39]Это очевидно, но важно не получить решения с $h_{i,k} < 0$, которые бессмысленны.

[40]Каждый станок будет тратить весь рабочий день на производство определенного типа древесины.

[41]Если мы обозначим через $z_k = \sum_{i=1}^{8} h_{i,k}\alpha_{i,k}$ количество материалов, произведенное из каждого типа древесины $k = 1, 2, 3, 4, 5$, то общее количество произведенной древесины (за рабочий день) равно $M = \sum_{k=1}^{5} z_k$. Имеем, что условия $z_k = p_k M$ для всех $k = 1, 2, 3, 4, 5$ эквивалентны первым условиям 3. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ по определению p_k и что

$$\begin{aligned} p_k M &= p_k\left(\frac{p_1 z_1}{p_1} + \frac{p_2 z_2}{p_2} + \frac{p_3 z_3}{p_3} + \frac{p_4 z_4}{p_4} + \frac{p_5 z_5}{p_5}\right) \\ &= p_k(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)\frac{z_k}{p_k} \\ &= z_k. \end{aligned}$$

Эти последние условия более ясны, чем в ссылке 3.

Станок Номер	Вид пиломатериала				
	1	2	3	4	5
1	0	0,3321	0	0	0,6679
2	0	0,9129	0,0871	0	0
3	0.5744	0	0,4256	0	0
4	0	0	0,9380	0,0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0

Таблица 3: Оптимальные $h_{i,k}$, где $i = 1, 2, \ldots, 8$ и $k = 1, 2, \ldots, 5$, которые мы искали.

Оптимальное общее количество единиц каждого вида древесины, которое может быть произведено за рабочий день, равно

$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,1}\alpha_{i,1} = 0,5744 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 7.872\,,$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,2}\alpha_{i,2} = 0,3321 \cdot 7 + 0,9129 \cdot 7,8 = 9.44532\,,$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,3}\alpha_{i,3} = 0,0871 \cdot 9,7 + 0,4256 \cdot 10 + 0,9380 \cdot 9,0 + 1 \cdot 8,5 = 22,04287\,,$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,4}\alpha_{i,4} = 0,0620 \cdot 13,5 + 1 \cdot 13,5 + 1 \cdot 14,0 = 28,337 \text{ и}$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,5}\alpha_{i,5} = 0,6679 \cdot 16,5 = 11.02035\,,$$

соответственно.

3.2.3 Другие возможные различные примеры

Теперь предположим, что у нас есть n станков, которые являются частью процесса производства определенного типа товара, состоящего из m частей (в принципе могут быть повторения типа частей, однако для простоты мы будем относиться к каждой части как к уникальному типу, так что это не вызовет никаких проблем). Обозначим через $\alpha_{i,k}$ количество деталей типа k, которые производятся за рабочий день на станке i. Заметим, что в случае, если станок i не может производить детали типа k (например, трактор не может производить винты), то мы полагаем $\alpha_{i,k} = 0$. Итак, что мы ищем? Мы хотим распределить работу между различными станками так, чтобы общее количество выполненных элементов было максимальным. Обозначим через $h_{i,k}$ время, выраженное в долях рабочего дня, в течение которого станок i используется для изготовления деталей типа k. Наша задача состоит именно в том, чтобы определить $h_{i,k}$, где $i = 1, ...n$, $k = 1, ..., m$, таким образом, чтобы максимально увеличить конечное количество готовых изделий. Давайте посмотрим, каким условиям должен удовлетворять $h_{i,k}$. Очевидно, что $h_{i,k} \geq 0$ для всех i, k и что для каждого i:

$$\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1 \ .$$[42]

Если z_k — это общее количество произведенных деталей типа k, то

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k} \ ,$$

поскольку $\alpha_{i,k} h_{i,k}$ дает нам общее количество деталей типа k, произведенных на станке i. Если мы хотим получить готовые товары, то должно быть наложено условие $z_1 = z_2 = ... = z_m$, т. е. общее количество предметов (необходимых для производства этого товара) каждого вида должно быть равным. Мы должны максимизировать общее значение z всех этих величин. Поэтому решение поставленной задачи приводит нас к решению Задачи А: определить $h_{i,k}$ при $i = 1, ..., n$, $k = 1, ..., m$ такие, что

1. $h_{i,k} \geq 0$ для всех $i = 1, ..., n$, $k = 1, ..., m$.
2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$ для каждого $i = 1, ..., n$.
3. $z = z_1 = ... = z_m$ и z - максимально, где $z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k}$ для всех k.

Читатель может легко записать Задачу А в виде задачи (22).[43] Другие варианты этой задачи также соответствуют структуре Задачи А. Например, если бы мы производили только один тип детали на разных станках с использованием разных процессов и существовали бы разные способы ее производства,[44] мы пришли бы к Задаче А с той разницей, что $\alpha_{i,k}$ в этом случае было бы количество деталей, прошедших через k−ый процесс на станке i за рабочий день.

Мы также можем добавить к исходной задаче дополнительные ограничивающие условия. Например, если для каждого производственного процесса требуется разное количество энергии, мы можем захотеть ограничить общий расход энергии. Пусть $c_{i,k}$ обозначает количество энергии, равное кВтч в день, которое израсходовано при изготовлении детали типа k с использованием станка i. Общий расход энергии определяется выражением $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} c_{i,k}$. Затем мы можем добавить к Задаче А ограничение,

[42] Можно предположить, что каждый станок будет использоваться весь рабочий день, иначе условие было бы заменено на $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} \leq 1$.

[43] Проблема, описанная в 3.2.2, принадлежит к этому семейству задач, если принять за "$\alpha_{i,k}$" $\frac{\alpha_{i,k}}{p_k}$, где p_k это доля древесины типа k, которая требуется для производства.

[44] Например, для изготовления шкафов сначала необходимо срубить деревья, затем распилить древесину на правильные размеры, ... и т.д., и все эти процессы можно выполнять с помощью различного оборудования.

согласно которому общий расход энергии должен быть меньше или равен C при некотором фиксированном C. Таким образом, мы приходим к задаче B: определить $h_{i,k}$, где $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ такие, что

1. $h_{i,k} \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$.
2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$ для каждого $i = 1, \ldots, n$.
3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ и z - максимально, где $z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k}$ для всех k.
4. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} c_{i,k} \leq C$.

Заметим, что $c_{i,k}$ можно заменить затратами воды или труда, затраченными на изготовление деталей типа k на станке i, и, таким образом, мы можем наложить ограничения на общее количество воды, которое могут быть израсходованы или на общее количество людей, которые должны быть заняты.

Теперь предположим, что один и тот же станок способен производить в одно и то же время разные детали (или выполнять несколько процессов одновременно) и что мы можем организовать производственный процесс, используя различные методы производства. Пусть $\lambda_{i,k,l}$ — количество деталей типа k, изготовленных l-м методом производства на станке i. Если $h_{i,l}$ – это время, выраженное в долях рабочего дня, затраченное на станке i при l-м способе производства, то общее количество деталей типа k, изготовленных с использованием всех станков, z_k, будут выражены как $z_k = \sum_{i,l} \lambda_{i,k,l} h_{i,l}$. Те же рассуждения, что и раньше, приводят нас к Задаче C: определить $h_{i,l}$ так, чтобы

1. $h_{i,l} \geq 0$ для всех i, l.
2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,l} = 1$ для каждого i.
3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ и z - максимально, где $z_k = \sum_{i,l} \lambda_{i,k,l} h_{i,l}$ для всех k.

Можно даже расширить задачу еще дальше и сформулировать таким же образом многие другие задачи, однако мы полагаем, что этих примеров читателю будет достаточно, чтобы понять идею, лежащую в основе ее применения, и насколько универсально линейное программирование применительно к экономическим задачам любого масштаба. Читатель, заинтересованный в расширении этих тем, может обратиться к [39] и [40]. Что касается масштаба, то решение поставленных нами задач, которые в основном касаются оптимизации использования станков, имеет большее значение применительно к более крупным секторам экономики.

3.3 Нелинейность

До сих пор мы считали, что изменения в экономике происходят линейным образом. Это означает, что мы предполагаем, что для производства в n раз большего (или меньшего) количества данного продукта x нам потребуется в n раз больше (или меньше) ресурсов. Это наилучшее начальное приближение к реальному макроскопическому функционированию экономики. Однако на более детальном уровне анализа мы обнаружим, что некоторые сектора ведут себя заметно иначе: мы называем это поведение нелинейностью (см. 7).

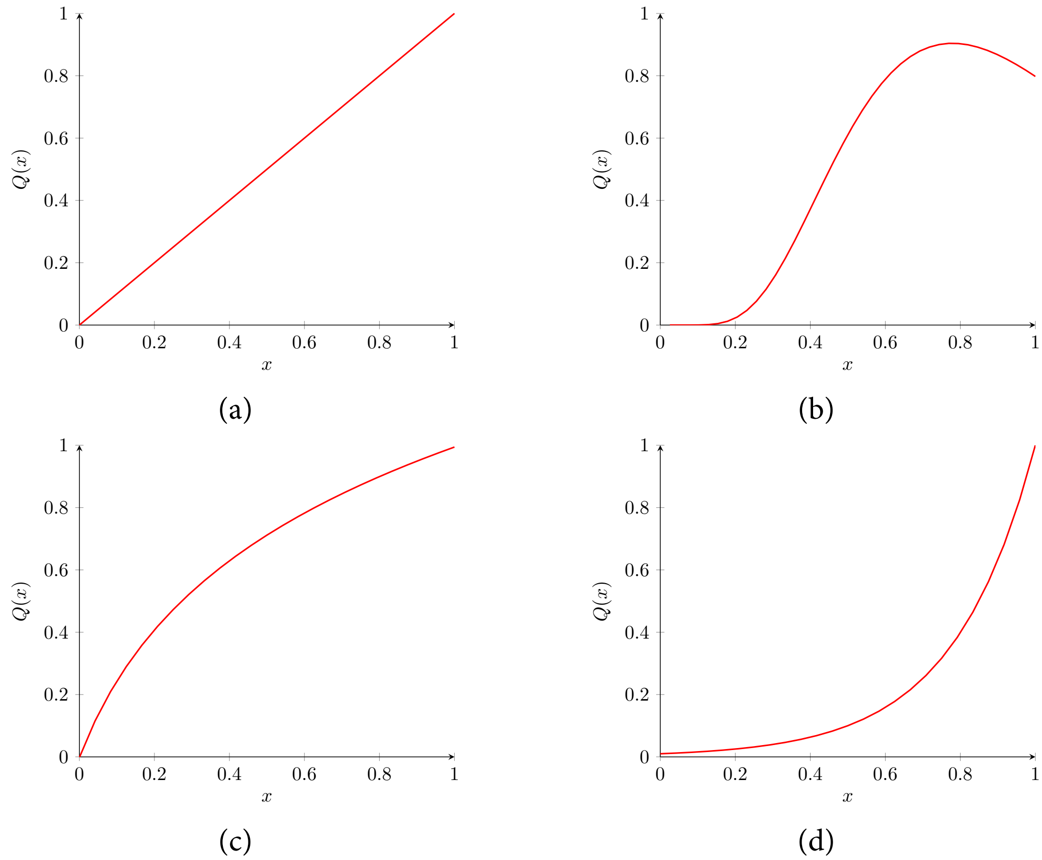

Рис. 7: Примеры линейных (а) и нелинейных (б, в, г) функций. Если мы понимаем их как производственные функции, горизонтальная ось — это количество входов, а вертикальная ось — это количество выходов.

Существуют различные типы явлений, которые препятствуют линейному поведению: фиксированные затраты, увеличение предельной производительности, снижение предельной производительности и т.д. Кроме того, мы бы включили в число нелинейностей те экономические ситуации, в которых требуются целочисленные результаты.[45] Мы включаем их, потому что мы имеем дело с понятием линейности в самом строгом смысле: в линейных случаях мы можем уменьшить или увеличить набор входов/выходов в произвольном соотношении, не ограничиваясь целыми результатами.

3.3.1 Сложности

Чтобы облегчить интуитивное понимание рассматриваемых сложностей, мы представим несколько конкретных примеров этих явлений в реальной экономике:

- Постоянные затраты: чтобы визуализировать их, давайте представим, что мы использовали линейную модель для случая добычи газа, так что мы нашли бы соотношение 2 часов для добычи 1 л газа (в среднем по всему сектору). Учитывая это, мы могли бы заключить, что для извлечения в общей сложности одного литра газа нам потребуется всего два часа человеческого труда. Однако, как только мы добавляем немного реализма в проблему, мы понимаем, что это абсурд. Чтобы добыть первый литр газа, нам сначала пришлось бы построить огромные объекты по добыче и транспортировке, требующие тысячи человеко-часов. Эти инвестиции, которые нам необходимы в качестве основы для выполнения определенных производственных процессов и которые не меняются в зависимости от произведенного количества, мы называем «постоянными затратами», и они необходимы в различных секторах.
- Предельная производительность: в качестве примеров увеличения и уменьшения предельной производительности мы имеем экономию и отрицательную экономию от масштаба. Эффект масштаба имеет место, когда по мере увеличения количества произведенной продукции средние издержки на единицу продукции снижаются (примером могут служить капиталистические конгломераты, использующие это преимущество на рынке). С неэкономичностью, с другой стороны, все обстоит наоборот. В таких секторах, как горнодобывающая промышленность или сельское хозяйство, в первую очередь обрабатываются наиболее плодородные земли с наибольшей производительностью в час, но по мере их использования обрабатываются менее продуктивные земли, что приводит к снижению предельной производительности. В этих случаях, если бы мы хотели удвоить производство, нам пришлось бы вложить более чем в два раза больше работы.
- Целые переменные: целые переменные $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ отличаются от вещественных переменных $(0.1, -34.3, 1, 1, \ldots)$, которые мы используем в линейном программировании, поскольку они не имеют десятичной части. Экономическими примерами целочисленных переменных являются фабрики или многие из производимых потребительских товаров. Для целей планирования мы должны их

[45] Мы говорим о целочисленных переменных, которые мы прокомментируем в следующем разделе, где мы проясним как эти понятия, так и их различие в отношении «произвольного соотношения».

учитывать, чтобы в плане не было предусмотрено построить на данном участке треть завода или выделить, например, полвагона под определенный магазин.

Далее мы рассмотрим различные стратегии, используемые для преодоления этих трудностей при расчете осуществимого и приблизительно оптимального плана.

3.3.2 Решения

Прежде чем перейти к типам решений, давайте отметим кое-что об их использовании. Когда приходится решать задачи, выходящие за рамки простого линейного планирования, вычислительная сложность логически возрастает, более или менее ограничивая нашу свободу маневра [41]. Это, однако, не мешает нам применять эти методы в масштабах меньше государственного: точные решения поставленных задач можно найти на практике и в других масштабах, таких как отраслевой, региональный или местный.[46] Существует обширная литература по более сложным, но очень полезным методам, которые можно применять в таких случаях, снижая вычислительную сложность за счет приближений и обеспечивая практически достижимые решения. Хотя углубленный анализ этих методов выходит за рамки этой вводной статьи, ниже мы кратко опишем некоторые примеры, чтобы читатель мог с ними ознакомиться.

Кусочная линеаризация

Чтобы иметь дело с нелинейными функциями (например, с увеличением или уменьшением производительности), мы можем их «линеаризовать». Линеаризация в математике означает выбор линейной функции, которая очень похожа на исходную, либо локально (как в случае кусочной линеаризации), либо глобально.
Интуитивным примером может служить модель, которую мы используем для Земли в зависимости от нашей цели. Все мы знаем, что Земля имеет сферическую форму (технически сфероид), и если бы мы рассчитывали орбиты спутников, нам пришлось бы учитывать ее сферичность. Однако при проектировании здания или сети поездов мы предполагаем, что Земля плоская, не принимая во внимание ее сферичность, потому что это значительно упрощает расчеты, и в этом масштабе ее глобальная форма не имеет значения.

Для нахождения приблизительно оптимального плана можно использовать точно такой же инструмент, учитывая, что в каждой локальной области нелинейных функций есть линейная функция, хорошо их аппроксимирующая (кусочная линеаризация). Этот инструмент используется во многих отраслях промышленности; например, мы могли бы линеаризовать производственные издержки, когда у нас есть уменьшающиеся предельные издержки, которые были оценены с некоторой ошибкой (у нас есть разрозненные данные, см. рис. 8).

[46] В дополнение к алгоритмическому подходу, представленному в этой статье, стоит выделить трактовку сложности в кибернетике. В послевоенном СССР моделирование динамических систем на основе непрерывной обратной связи приобрело большую актуальность именно в контексте регионального и местного планирования. В качестве яркого представителя этой инициативы стоит упомянуть малоизвестную группу советских кибернетиков в Новосибирском институте экономики [42].

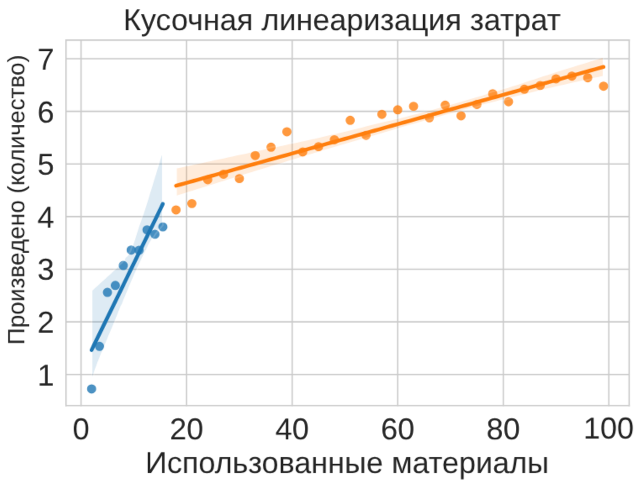

Рис. 8: Пример уменьшения предельных издержек. Мы аппроксимируем данные двумя прямыми линиями в зависимости от того, большее или меньшее количество произведено. Заштрихованная область указывает доверительный интервал аппроксимации.

Невыпуклая оптимизация

Невыпуклая оптимизация используется именно тогда, когда у нас есть поведение с возрастающей предельной производительностью (среди прочего), такое как экономия за счет масштаба. Это приводит к невыпуклым допустимым областям, где мы не можем применять методы линейного программирования, которые мы использовали.[47]

Однако один из инструментов, который можно использовать для решения этой проблемы, заключается в том, чтобы вписать выпуклый многогранник P_1 внутрь невыпуклой области P, чтобы мы могли применять там инструменты выпуклого программирования. Получив приближенный максимум x_1 внутри этой области, мы можем использовать его для построения новой выпуклой области P_2, более близкой к оптимуму невыпуклой области x_l (хотя бы локальному), и повторить то же самое (см. рисунок 9). Таким образом, путем рекуррентности мы в конечном итоге приблизились бы (с небольшой погрешностью) к оптимуму [21] (по крайней мере, локальному).

На самом деле именно так бессознательно работает сегодняшний капиталистический рынок: приближение к оптимуму путем повторения. Хорошая новость заключается в том, что в плановой экономике, имея глобальный обзор, нам не нужно довольствоваться локальным оптимумом невыпуклой области, но есть несколько инструментов анализа, позволяющих найти глобальный оптимум всей области x^*. Имея этот обзор,

[47] Конкретный математический механизм, с помощью которого эти типы поведения в определенных секторах приводят к невыпуклым допустимым областям, включает в себя вторые производные их производственных функций. Однако как этот механизм, так и его воплощение в реальном экономическом поведении выходят за рамки пояснений данной статьи.

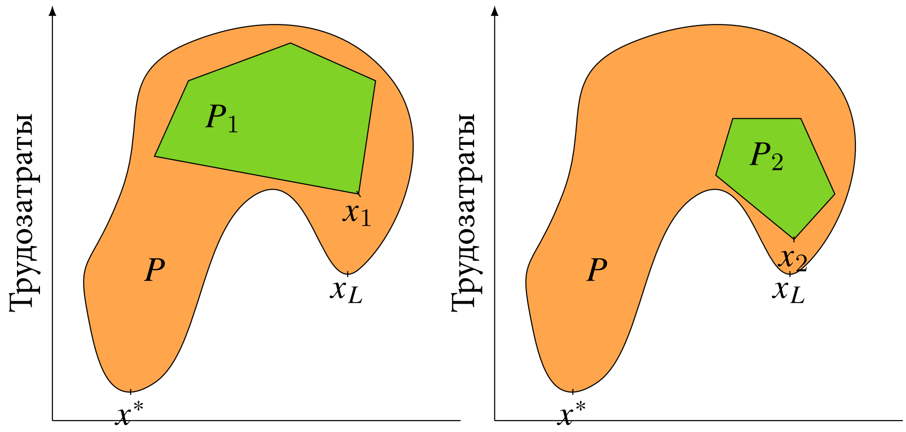

Рис. 9: Графики, представляющие первые две итерации метода

мы могли бы сократить расходы и повысить эффективность процессов там, где рынок не может этого сделать из-за того, как он работает.

Смешанное целочисленное программирование

Проблема целочисленных переменных имеет решение, известное как смешанное целочисленное программирование (MIP). Это разновидность линейного программирования с добавлением ограничения на то, что некоторые переменные должны быть целыми. Ограничение значительно усложняет задачу до такой степени, что требуются другие алгоритмы, такие как метод "ветвления и разрезания". Читатель, интересующийся проблемами такого типа, может обратиться к [43]. Пример задачи MIP показан на рисунке 10.

Искусственный интеллект (Artificial Intelligence, AI)

Другим предложением по устранению нелинейностей является преобразование технологической матрицы A таким образом, чтобы коэффициенты больше не были скаляром a_{ij}, а представляли собой функцию $f_{ij}(x_j)$, способную вместо этого моделировать эффект масштаба [44]. В результате технологическая матрица $F(\mathbf{x})$ меняется в зависимости от количества каждого производимого товара j.

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad \longrightarrow \quad (I - F(\mathbf{x}))\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1) & f_{12}(x_1) & \cdots & f_{1n}(x_1) \\ f_{21}(x_2) & f_{22}(x_2) & \cdots & f_{2n}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x_n) & f_{n2}(x_n) & \cdots & f_{nn}(x_n) \end{bmatrix}$$

Чтобы это предложение было осуществимо для крупномасштабного экономического планирования, каждая производственная единица должна иметь возможность точ-

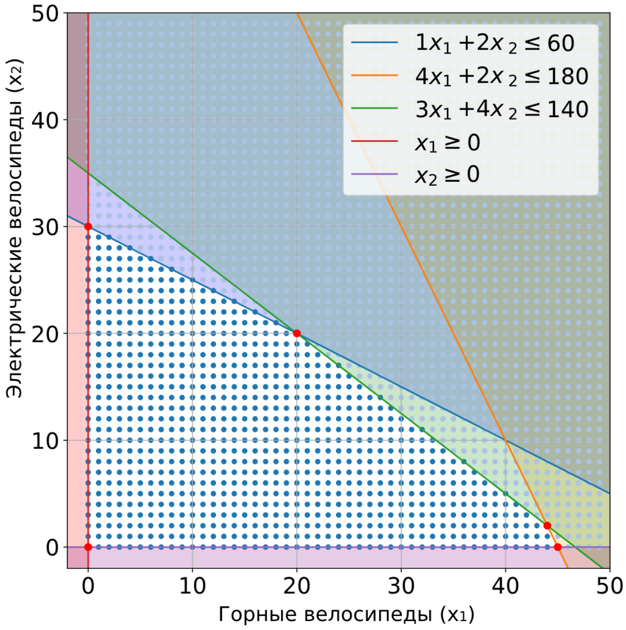

Рис. 10: Пустая область представляет допустимую область задачи линейного программирования из раздела 3.2, в то время как синие точки представляют допустимую область в ее целочисленном аналоге, а именно, переменные в задаче о велосипеде должны быть целыми числами (задача целочисленного линейного программирования).

но моделировать количество ресурсов, необходимых для производства каждого товара как функцию от количества, которое должно быть произведено, что делает необходимым генерировать большое количество математических моделей. Благодаря недавним достижениям в науке о данных и искусственном интеллекте, такой процесс может быть в определенной степени автоматическим, поскольку функции f_{ij} могут быть непосредственно “обучены” на основе реальных производственных данных от каждой производственной единицы, как предложено Спиридоном Самотракисом в [45].

4 Вычислительная сложность

В предыдущем разделе мы видели, насколько полезной может быть линейная оптимизация для рациональной и эффективной организации экономики без денег. Однако Людвиг фон Мизес утверждал, что это невозможно из-за сложности расчетов [46, 47].[48] Цель этого раздела состоит, с одной стороны, в том, чтобы точно определить, что подразумевается под «сложностью необходимых вычислений» — то, что мы позже назовем *вычислительной сложностью*, связанной с определенным алгоритмом, — и, с другой стороны, показать вычислительную сложность определенных алгоритмов.

Когда Мизес сформулировал свою знаменитую критику экономического планирования, слово *компьютер* ассоциировалось с профессией, а не с объектом, используемым сегодня для подключения к Интернету, способным выполнять миллиарды арифметических операций в секунду. В случае с СССР ЭВМ можно было представить в виде партийного чиновника, сидящего в каком-нибудь кабинете Госплана и выполняющего сложения и вычитания на полной скорости, что влекло за собой два основных ограничения: размер решаемой задачи был очень ограниченным, а ошибки вычислений были нормой. Однако эти ограничения преодолены современными компьютерами, которые могут выполнять те же операции без сбоев и с невообразимой для человека скоростью. В последнем случае рациональное выполнение экономических расчетов будет возможно только при наличии достаточного количества алгоритмических и вычислительных ресурсов для своевременного решения задач линейного программирования. [48].

4.1 Концепция сложности

Анализ вычислительной сложности - это раздел алгоритмики, который как раз и пытается ответить на вопрос, можно ли решить данную математическую задачу в текущих технологических условиях. Сложность алгоритма определяется отношением количества простых арифметических операций к количеству переменных в задаче. Например, подсчитывая количество символов в предложении (к примеру, предложение «Давайте планировать!», в котором 11 символов), нам нужно перебирать только каждый символ, начиная с первого, и с каждой новой итерацией добавить 1 к счетчику, первоначально установленному на 0. Каждая из этих двух операций, итерация и добавление, повторяются для каждого нового символа, и, следовательно, мы говорим, что эта функция имеет сложность n, где n — количество символов во фразе. Чтобы выразить сложность алгоритма, мы используем так называемую нотацию big-O, которая выражает, что количество операций алгоритма *пропорционально*, но не точно, количеству переменных в

[48] С его точки зрения: «Утверждалось, что в социалистической экономике можно было бы решить задачу экономического расчета путем решения уравнений, учитывая описание условий экономического равновесия, данное математической экономикой. [...] [Однако] Хайек (1935) оценивает порядок количества уравнений и необходимых вычислений в сотни тысяч. [...] Ясно, что множество данных и соответствующее определение уравнений - трудная задача, выходящая за рамки централизованного планирования. Практическая невозможность реализации предложений, относящихся к этому или любому подобному решению, безусловно, бесспорна" [46].

нашей задаче n. Поэтому мы говорим, что сложность подсчета символов в предложении равна $O(n)$.

Но почему бы вместо этого не получить точное количество операций? Это может быть сложнее, чем кажется на первый взгляд, так как зависит от множества различных факторов, таких как процессор, на котором будет выполняться алгоритм, язык программирования, используемый для его реализации, насколько эффективна сама реализация и т.д. Поэтому, нотация big-O обеспечивает хорошее приближение для группировки алгоритмов в соответствии с их сложностью без учета всех этих факторов.

Мы говорим, что алгоритм "выполним" или "достаточно быстр" для выполнения на современных компьютерах, если он принадлежит к классу алгоритмов со сложностью P. P означает, что эти алгоритмы могут быть решены за полиномиальное время; то есть время их выполнения ограничено полиномиальным выражением вида $O(n^k)$, где k — положительная константа. Внутри этой группы мы говорим, что задачи линейной сложности $O(n)$ (т.е. $k = 1$) имеют наименьшую степень сложности, за которой следует логарифмическая сложность $O(n\log(n))$. На следующем уровне сложности находятся задачи полиномиальной сложности порядка больше 1 (т.е. $k > 1$), например $O(n^2)$ или $O(n^3)$ для $k = 2$ и $k = 3$ соответственно. Тем не менее, эти задачи все еще могут быть достаточно быстро решены на большинстве компьютеров в настоящее время, если у них достаточно вычислительных ресурсов.

С другой стороны, существуют недетерминированные задачи с полиномиальным временем (известные как задачи *NP*), которые имеют сложность $O(e^n)$.[49] Мы говорим, что эта последняя группа задач неразрешима с вычислительной точки зрения, поскольку количество операций растет экспоненциально с количеством переменных, что быстро истощит даже самый быстрый компьютер. Поначалу это деление на простые и сложные задачи может показаться немного произвольным, особенно когда мы не совсем понимаем, что подразумевается под логарифмом или экспоненциальной функцией. Однако причина разделения становится кристально ясной при сравнении различных функций сложности на одном и том же графике (см. 11).

[49]Число Эйлера e приблизительно равно 2,718.

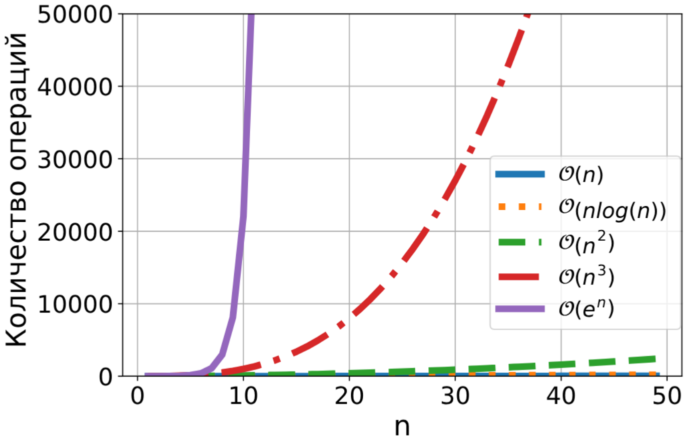

Рис. 11: Эволюция вычислительной сложности в зависимости от n.

Мы можем лучше проиллюстрировать различия между задачами P-типа и NP-типа на примере. Сложность умножения двух простых чисел невелика, независимо от размера этих чисел (например, $1180 \cdot 1233 = 1454940$ и $1 \cdot 2 = 2$ включают “однократное умножение” каждое).[50] Однако, если мы предложим обратную задачу, а именно нахождение двух простых чисел, умножение которых дает определенное число, это может показаться простой задачей в небольшом масштабе (например, $15 = 3 \cdot 5$), но она становится чрезвычайно сложной, когда числа становятся немного больше (например, какие два простых числа дают 8003 доллара при умножении? [51] На первый взгляд задача нахождения простых чисел может показаться неинтересной, но криптография основана на сложности решения таких задач и благодаря ей мы можем, например, предотвратить видимость наших данных при их передаче через точку доступа Wi-Fi.

Глядя на рисунок 11, кажется очевидным, что линейные, логарифмические и полиномиальные случаи $O(n^2)$ имеют гораздо меньшую сложность, чем остальные. Другой крайностью является экспоненциальная сложность, которая очень быстро становится почти вертикальной. На самом деле экспоненциальная концепция часто противоречит здравому смыслу, потому что мы, люди, не привыкли иметь дело с такими большими величинами в повседневной жизни. Возможно, пример даст читателю лучшее представление: количество атомов в известной Вселенной оценивается по меньшей мере в 10^{80} (единица с последующими 80 нулями).[52] Экспоненциальная функция превысит это значение при $n = 185$! Другими словами, если бы n было количеством элементов в экономике, алгоритмы экспоненциальной сложности нельзя было бы использовать даже для планирования экономики домохозяйства. Внимательный читатель мог заметить, что, на первый взгляд, полиномиальная сложность $O(n^3)$ ведет себя аналогично, только растет медленнее. Нет ничего более далекого от правды! Ключ к пониманию этого вопроса находится в точке $n = 10$, для которой экспоненциальная сложность в десять раз больше,

[50] Сложность умножения целых чисел по состоянию на 2019 год равна $O(n \log n)$. См. Алгоритмы умножения.

[51] Осторожно, спойлер: $8003 = 53 \cdot 151$

[52] https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe#Matter_content%E2%80%94number_of_atoms

чем полиномиальная $O(n^3)$. Эта разница будет расти *экспоненциально* с каждым увеличением на n, поэтому они совсем не похожи. Для решения последнего типа задач потребуется больше времени, но современные компьютеры все еще могут решать их с такой скоростью, что мы можем сказать, что их можно запускать даже при больших значениях n.

После представления различных типов сложности вопрос о том, как можно получить сложность данного алгоритма, остается открытым. Это фундаментальное упражнение для понимания того, что такое вычислительная сложность на самом деле. Раздел 2 представил обратную матрицу Леонтьева как фундаментальный элемент экономического планирования. Поэтому сложность, связанная с обращением квадратной матрицы, является отличным упражнением для понимания вычислительной сложности в области экономического планирования. Хотя это не самый эффективный метод обращения матрицы, алгоритм Гаусса-Жордана[53] отлично подходит для иллюстративных целей и, следовательно, будет представлен в следующем разделе вместе с определением его сложности.

4.2 Обращение матрицы: метод Гаусса-Жордана

Предположим, есть обратимая квадратная матрица A. Метод Гаусса-Джордана состоит из нахождения “элементарных” операций[54], в которых матрица A преобразуется в единичную матрицу I. После их нахождения эти операции необходимо применить к единичной матрице I в том же порядке, чтобы получить обратную матрицу A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Далее мы шаг за шагом представляем необходимые операции для преобразования A в I[55]:

1. Разделить строку 1 на $a_{1,1}$. Выполняемые операции: 3 деления.
2. Из строки 2 вычесть первую строку, умноженную на $a_{2,1}$. Выполняемые операции: 3 умножения и 3 вычитания.
3. Из строки 3 вычесть первую строку, умноженную на $a_{3,1}$. Выполняемые операции: 3 умножения и 3 вычитания.

[53] https://es.wikipedia.org/wiki/Eliminaci%C3%B3n_de_Gauss-Jordan

[54] Эти операции состоят из добавления к строке множителей другой строки, умножения строки на ненулевой скаляр или изменения порядка строк. Читатели, желающие узнать больше о линейной алгебре, могут обратиться, например, к [49], [50]. Существуют сотни хороших учебников, посвященных этому предмету.

[55] Можно предположить, что $a_{1,1} \neq 0$, так как A допускает обратную матрицу ни один столбец A не может содержать все нулевые записи, поэтому, меняя порядок строк, мы всегда можем это гарантировать.

После этих первых трех шагов матрица A стала матрицей A', первый столбец которой идентичен первому столбцу матрицы I.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix}$$

4. Разделим строку 2 на $a'_{2,2}$.[56] Выполняемые операции: 2 деления.
5. Из строки 3 вычесть 2-ю строку, умноженную на $a'_{3,2}$. Выполняемые операции: 2 умножения и 2 вычитания.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & 1 & a''_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix}$$

6. Разделим строку 3 на $a''_{3,3}$.[57] Выполняемые операции: 1 деление.

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & 1 & a''_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В этот момент диагональ матрицы уже имеет все компоненты равные 1. Теперь остается только действовать таким же образом, но в обратном направлении.

7. Из строки 2 вычесть 3-ю строку, умноженную на $a''_{2,3}$. Выполняемые операции: 1 умножение и 1 вычитание.
8. Из первой строки вычесть 3-ю строку, умноженную на $a'_{1,3}$. Выполняемые операции: 1 умножение и 1 вычитание.
9. Из первой строки вычесть 2-ю строку, умноженную на $a'_{1,2}$. Выполняемые операции: 1 умножение и 1 вычитание.

$$A''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

После всех этих операций $A''' = I$. В общей сложности этот процесс потребовал 28 простых арифметических операций (6 делений, 11 умножений и 11 вычитаний).[58] Однако это только для случая, когда A является матрицей 3×3. Мы должны обобщить вычисление операций для произвольной матрицы $n \times n$.

[56] Снова можем считать, что $a'_{2,2} \neq 0$, так как ни один столбец полученной подматрицы не может иметь все нулевые записи.

[57] Снова можем считать, что $a'_{3,3} \neq 0$, так как ни один столбец полученной подматрицы не может иметь все пустые записи.

[58] Изменения строк в случаях, когда «опорная точка» нулевая, не влекут за собой никаких изменений в вычислительной сложности алгоритма.

4.3 Обращение матрицы: сложность

Метод Гаусса-Джордана можно рассматривать как итерационный метод, в котором мы работаем с матрицами все меньшего и меньшего размера. Для матрицы $n \times n$, показанной ниже, начиная с первой *опорной точки* (опорные точки — это элементы на диагонали матрицы, и они должны стать равными 1), цель состоит в том, чтобы сделать все остальные элементы в той же строке и столбце равными 0, а затем выполнить аналогичную операцию с матрицей $(n-1) \times (n-1)$.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & & \\ a_{3,1} & & & & \\ \vdots & \multicolumn{4}{c}{\boxed{(n-1) \times (n-1)}} \\ a_{n,1} & & & & \end{bmatrix}$$

Как и ранее, мы предполагаем, что A обратима[59] и, следовательно, мы можем считать, что $a_{1,1} \neq 0$, иначе мы могли бы поменять местами порядок строк, чтобы гарантировать это.

Для того чтобы сделать первую “опорную точку” равной 1, необходимо выполнить n делений (первый ряд разделить на $a_{1,1}$). Чтобы первый элемент в каждой строке i стал равным 0, необходимо будет выполнить n умножений (умножить первую строку на $a_{i,1}$) и n вычитаний (вычесть n элементов строки i из элементов строки 1). Эту операцию необходимо повторить для каждой из $n-1$ строк. Остается только сделать последние $n-1$ элементов в первой строке равными 0, что можно сделать, умножив “опорную точку” в столбце j на $a_{1,j}$ и вычитая результат из этой позиции из первого ряда. Следовательно, эта операция требует $n-1$ умножений и $n-1$ вычитаний. Наконец, чтобы получить общее количество операций $N(n)$, мы должны добавить операции, необходимые для матрицы $(n-1) \times (n-1)$, к количеству операций, полученному выше,[60] в результате чего получается уравнение (27).

$$N(n) = \underbrace{N(n-1)}_{\text{Рекурсивность}} + \underbrace{n}_{\substack{\text{Деления,} \\ \text{чтобы сделать} \\ \text{опорную точку} = 1}} + \underbrace{2 \cdot n \cdot (n-1)}_{\substack{\text{Умножения и} \\ \text{вычитания, чтобы} \\ \text{сделать строку} = 0}} + \underbrace{2 \cdot (n-1)}_{\substack{\text{Умножения и} \\ \text{вычитания, чтобы} \\ \text{сделать строку} = 0}} \tag{27}$$

Последние два элемента суммирования в уравнении (27) можно объединить в один член, что даст выражение $N(n) = N(n-1) + n + 2 \cdot (n^2 - 1)$. На этом этапе остается только продолжить итерационный процесс:

$$N(n-1) = N(n-2) + (n-1) + 2 \cdot ((n-1)^2 - 1)\ . \tag{28}$$

[59] Иначе цель алгоритма не может быть достигнута.

[60] При переходе к последовательным опорным точкам мы всегда должны убедиться, что опорная точка не равна нулю, что можно сделать, поменяв местами строки, если матрица обратима. Мы предполагаем, что перестановка строк не приводит к изменению вычислительной сложности.

В приведенном выше уравнении мы просто начали с $N(n)$ и заменили $n - 1$ на n, тем самым применив концепцию *рекурсивности*. Чтобы получить общее количество операций, нам придется продолжить для $n-2$, $n-3$ и т.д., пока мы не достигнем $N(1) = 1$, потому что наименьшая матрица, которую мы найдем, равна матрице 1×1, соответствует последнему повороту, которому нужно всего одно деление, чтобы стать 1. Выраженная в математической записи, сложность метода Гаусса-Жордана будет равна:

$$C = \sum_{k=1}^{n}[k + 2 \cdot (k^2 - 1)] = \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} 1 \,. \tag{29}$$

Как перейти от C к $O(n^3)$? К счастью, уравнение (29) можно упростить с помощью нескольких математических приемов. Первое из них довольно очевидно: сложение n, умноженное на 1, равно n. С другой стороны, первый член C — это то, что в математике известно как *арифметическая прогрессия*, которую можно очень оригинально упростить:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \,.$$

Ее также можно переписать в обратном порядке:

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \,.$$

Складывая оба выражения, получаем, что $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$, так как существует n сумм вида $j + (n - j + 1) = n + 1$. Выражение для $\sum_{k=1}^{n} k^2$ будет получено из ранее выведенной формулы. С одной стороны имеем

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1 \tag{30}$$

и, с другой стороны, получается, что

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n}[3k^2 + 3k + 1] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \tag{31}$$

Сопоставляя (30) и (31), мы получаем,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \,. \tag{32}$$

На этом этапе сложность метода Гаусса-Жордана можно переписать следующим образом:

$$C = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6} \,. \tag{33}$$

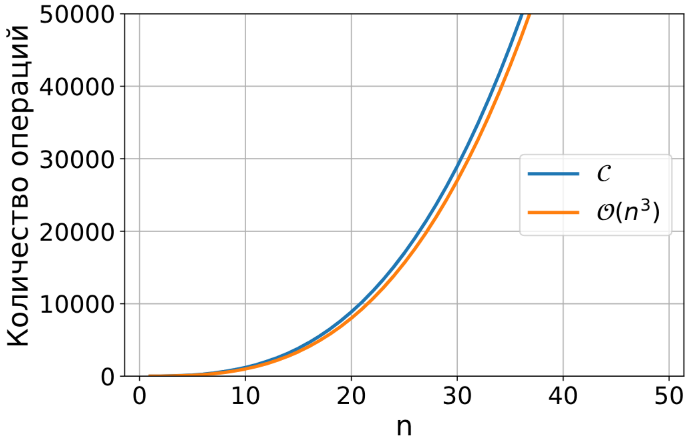

Рис. 12: Сравнение сложности между $\mathcal{O}(n^3)$ и точным числом операций метода Гаусса-Жордана.

Мы рекомендуем читателю вычислить уравнение (33) при $n = 3$ и убедиться, что они действительно получают тот же результат, вычисленный для матрицы 3×3 из раздела 4.2.

На данный момент остается только один шаг, чтобы получить сложность в нотации big-$\mathcal{O}$. При достаточно большом n элемент с наибольшим показателем степени будет доминировать в полученном выражении общей сложности (см. рисунок 12). Следовательно, вычислительная сложность метода Гаусса-Джордана составляет $\mathcal{O}(n^3)$.

4.4 Сложность и экономическое планирование

Поняв концепцию вычислительной сложности, мы теперь готовы задать вопрос: можно ли использовать симплекс-метод для планирования современной экономики? За последние десятилетия были предложены различные алгоритмы для симплекс-метода, все они имеют полиномиальную сложность, как показано в таблице 4. Возможность (или невозможность) использования таких алгоритмов для планирования экономики будет зависеть от конечного значения n, количества изделий, которые необходимо произвести.

Можно предположить, что в современной экономике с высокой степенью специализации количество типов продуктов пропорционально (но, вероятно, меньше) количеству жителей, поскольку производство некоторых сложных продуктов (например, транспортных средств, домов, компьютеров и т.д.) требует работы более чем одного человека. В результате верхний предел для параметра n будет, если быть щедрым, порядка 10^9 для таких крупных экономик, как Индия или Китай.

Удивительно, но суперкомпьютеры, использующие параллельные вычисления на тысячах процессоров одновременно, с 2006 года [51] уже могли решать задачи такого масштаба менее чем за час, используя параллельные вычисления на тысячах процессоров.[61] Для более скромных задач с n порядка 10^6 4-ядерного процессора большинства настольных компьютеров было бы достаточно [53].

Автор	**Год**	**Сложность**
Хачиян	1979	$\mathcal{O}(n^6)$
Кармаркар	1984	$\mathcal{O}(n^{3,5})$
Ренегар	1988	$\mathcal{O}(n^{2,873})$
Вайдья	1989	$\mathcal{O}(n^{2,5})$
Ли и Сидфорд	2015	$\mathcal{O}(n^{2,5})$
Коэн, Ли и Сонг	2020	$\mathcal{O}(n^{2,373})$

Таблица 4: Вычислительная сложность различных алгоритмов, предложенных для симплекс-метода [54].

Как видим, *проблема экономического расчета* при социализме, по крайней мере с технической точки зрения, вовсе не является неразрешимой. Как анализ вычислительной сложности, так и эмпирические результаты показывают, что решение задач оптимизации размером с сегодняшнюю крупнейшую экономику вполне осуществимо. Однако следует отметить, что проблема экономического расчета ставится не только в *технических* терминах, как мы рассматривали до сих пор, но также будет иметь чисто *экономический* характер, связанный с человеческой оценкой и принятием решений о целях и средствах производственной деятельности [48, 55]. Именно на этом последнем пункте сосредоточена часть нынешней австрийской критики плановой экономики, и именно поэтому мы в Cibcom рассматриваем этот вопрос как один из ключей к возвращению социалистического планирования в игру.

[61] Последнее исследование в этой области было проведено Томасом Хардином в [52], где он анализирует возможности современных суперкомпьютеров для решения линейных задач с разреженными матрицами (т.е. с большинством входных данных равных 0), поскольку ожидается, что ресурсы каждой из отраслей представляют собой небольшое подмножество всех доступных продуктов в экономике, что приводит к разреженным технологическим матрицам.

5 Заключение

Большинство проблем экономического планирования, стоявших перед так называемыми “странами реального социализма”, сегодня могут быть решены благодаря использованию некоторых современных математических и вычислительных средств. Несмотря на то, насколько сложными они могут показаться на первый взгляд, к ним можно подойти с педагогической точки зрения, что позволит нам оценить их практическое значение. Экономическая проблема, сформулированная во введении как «Логистика, развитие, осуществимость», получает ясный, последовательный и основательный ответ от киберкоммунистической программы.

Что касается логистики, задача состоит в том, чтобы управлять вопросами логистики более точно и эффективно, чем при капиталистическом рынке и его механизмах: дисциплинарной конкуренции между независимыми капиталами и денежной прибыли как общему одномерному стимулу. Предлагается это делать, избегая вышеупомянутых пороков ранней советской экономики, а именно, планирования количества товаров каждого вида на основе попыток предвидеть или прогнозировать потребности граждан. Какие уроки мы можем извлечь из этого подхода? Какие требования вытекают из нашего исследования?

1. Стоимость товаров должна быть *пропорциональна общественным затратам* и органично учитывать дефицит природных ресурсов.
2. Планирование должно основываться на потребностях, эффективно выраженных во множестве социальных инстанций, формирующих *систему обратной связи между Администрацией и ее различными ответвлениями* на разных уровнях.[62]
3. Необходима *альтернативная универсальная система учета* для представления или унификации различных наборов товаров с помощью одной общей единицы. Если мы не сможем использовать немонетарные единицы, превозобладает использование денег со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Начиная с последнего, киберкоммунизм рассматривает так называемые *совокупные затраты труда ILC* как единственную величину, способную взять на себя эту функцию, что влечет за собой два основных преимущества. Первое и наиболее очевидное заключается в том, что, будучи включенными в методологию *затраты/выпуск*, они закладывают основу для разработки подробных экономических планов. Чтобы иметь возможность рассчитать ILC, необходимо знать, сколько единиц каждого вида товара необходимо для производства единицы любого другого товара. Именно благодаря этому мы можем реализовать нашу основную стратегию планирования: определить из *технологической матрицы* количество единиц каждого вида товара, которое необходимо произвести, чтобы удовлетворить *постоянно меняющийся конечный спрос*. Как мы видели, для этого требуется только вычисление обратной матрицы Леонтьева.

[62] Как мы попытаемся объяснить в будущем, начиная с киберкоммунизма, «[прямая] демократия важна не [только] по моральным соображениям, но и для того, чтобы иметь возможность подробно и максимально полно собирать информацию о спросе, а также собирать хорошие идеи, которые в настоящее время игнорируются рыночной системой ” [56].

Второе преимущество — это то, о чем мы не говорили подробно: ILC позволяют создать систему компенсации, альтернативную известной нам заработной плате, основанную на *трудовых облигациях или кредитах*. Это позволяет приобретать определенные виды потребительских товаров в общественных магазинах без проблемы постоянного дисбаланса между реальным спросом и предложением (описано в Приложении 1). Для получения дополнительной информации об этом предложении мы рекомендуем прочитать [10].

В любой развитой экономике с несколькими отраслями и технологиями производства каждого продукта необходимо использовать *функцию распределения* ресурсов между различными экономическими задачами. Это то, что мы назвали проблемой развития. В капиталистических обществах эту функцию выполняет рынок с его разрушительными периодическими кризисами, возникающими в результате конкуренции, и предпринимательская функция с вытекающим отсюда отсутствием демократического контроля над экономикой. Вместо этого мы предлагаем экспроприацию средств производства и коллективное управление ими с помощью инструментов математической оптимизации для исполнения экономических решений. Оптимизация позволяет максимизировать или минимизировать определенную целевую функцию, такую как объем работы в обществе или выделяемый CO_2, принимая во внимание биофизические пределы системы (количество потребляемого сырья, доступное рабочее время и др.). Используя этот альтернативный подход, мы стремимся достичь большей эффективности, поскольку при определенном технологическом уровне будут приниматься оптимальные решения, что, в свою очередь, позволит осуществлять демократический контроль над экономикой либо через плебисциты, либо через потребление населения, отражаемое в спросе.

Основная методология, представленная для решения этих проблем, — это *линейное программирование*, которое состоит из оптимизации линейных функций в выпуклом многограннике. Как мы видели, эта методология весьма универсальна. Семейство микроэкономических и макроэкономических задач, которые можно формализовать с помощью линейного программирования, обширно.

Тем не менее, как и следовало ожидать, жемчужиной киберкоммунистической инициативы является обещание, что все эти расчеты и операции можно вычислить за разумное время и с достаточным приближением. Другими словами, это отвечает на так называемую проблему осуществимости.

Мысль о том, что это невозможно, что проблема экономического расчета не может быть решена демократическим путем, царит почти во всех уголках политического спектра. От либералов до рыночных социалистов и различных форм социал-демократии мы находим людей, повторяющих аргументы австрийской школы. Однако значительный прогресс последних десятилетий в области более эффективных алгоритмов оптимизации и более быстрых компьютеров, по-видимому, свидетельствует об обратном.

Хорошо известно, что линейное программирование легко реализуется на компьютерах, использующих такие алгоритмы, как *симплекс-метод*. Кроме того, решение более конкретных нелинейных проблем, таких как фиксированные затраты, экономия и отрицательный эффект масштаба или целочисленные переменные, может быть найдено, если мы соответствующим образом ограничиваем их масштаб. Для каждой из этих задач существуют алгоритмические подходы, которые позволяют применять их для того, чтобы максимизировать преимущества плана: кусочная линеаризация, невыпуклая оптимизация, смешанное целочисленное программирование, искусственный интеллект и т.д.

В этой статье представлено введение в анализ вычислительной сложности, который позволяет нам систематически анализировать сложность решения заданного алгоритма либо в виде вычислительных ресурсов, либо в виде вычислительного времени. Мы считаем, что любая уважающая себя критика проблемы экономического расчета должна начинаться с инструментов, предлагаемых анализом вычислительной сложности. Исследования, упомянутые в этой статье, показывают, что, учитывая новейшие современные ресурсы, мы уже способны решать задачи оптимизации для планетарной экономики, поэтому предполагаемая невозможность экономических расчетов не кажется таковой.

Для ясности в этой статье задача разработки упрощена, как показано в Разделе 2.2. Для более реалистичного и подробного анализа этого вопроса лучше послужат справочные материаламы таких специалистов, как Кокшот, Дапприч или Хардин. Однако у нас все еще остается четкое политическое намерение: показать жизнеспособность коммунистического проекта через прояснения его технических граней и основ, на которых он может быть построен.

Наконец, давайте подчеркнем то, что не всегда кажется явным: вам не нужно быть кибернетическим гением, чтобы обнаружить «волшебство», стоящее за этой исследовательской программой. Подавляющему большинству из нас не придется изобретать какие-либо математические методы или корректировать вычислительную сложность любого пятилетнего плана. Наша инициатива по распространению этой программы, описанной на такой глубине, направлена, прежде всего, на то, чтобы большая часть нашего класса узнала о ее существовании, чтобы мы *осознали*, насколько обнадеживающим является наш проект. Это послание для тех из нас, кто чувствует оковы капитала: Товарищи, есть возможности для нашей долгожданной демократии, этого семени, которое медленно прорастает для, кто знает, каких будущих урожаев, и чьи ростки не заставят себя долго ждать, чтобы пробиться наружу!

Благодарности

Мы очень благодарны за помощь всем товарищам, сделавшим возможным коррекцию и развитие этой статьи, включая Paul Cockshott, Tomas Härdin, Ian Wright, Dave Zachariah и Fahd Boundi, а также наших коллег из CibCom и ADH (Ассоциации дизайна истории), которые неоднократно рецензировали его. Ваша приверженность и влияние делают вас бесспорными соавторами этой коллективной работы. Мы также благодарим художника Игоря Савина, чья работа послужила источником вдохновения для иллюстрации обложки.

О коллективе CibCom

CibCom — это междисциплинарный коллектив испанского происхождения с фокусом на Латинскую Америку, занимающийся исследованием и распространением идей зарождающегося киберкоммунизма (аббревиатура нашего имени): проект, продвигаемый Виктором Глушковым и Стаффордом Биром во второй половине 20-го века и разрабатываемый Полом Кокшоттом и Аллином Коттреллом в последние десятилетия. Наши ряды состоят из студентов и специалистов из мира математики, физики, вычислительной техники и телекоммуникаций, а также философии, экономики и социологии, которые, исходя из марксистской парадигмы, настаивают на необходимости преодоления рыночной экономики.

Мы стремимся возродить революционные традиции после десятилетий отступлений. Мы считаем, что для того, чтобы рабочее движение восстановило свой преобразующий потенциал, оно должно вновь заявить о своих посткапиталистических планах. По этой причине наши усилия в основном направлены на построение прочной и целостной теоретической базы того, что мы считаем основным институциональным инструментом социалистической политической программы: демократического планирования экономики. Власть рабочих должна иметь возможность осуществиться.

О переводе на русский язык

Уважаемый читатель! Данный перевод выполнен волонтером, который не является профессиональным переводчиком. Если вы владеете английским языком, рекомендуем вам обратиться к первоисточнику на ресурсе CibCom: `Mathematics to plan an economy: an introduction to cyber-socialist calculation`. Будем признательны, если вы пришлете рекомендации по улучшению перевода на электронный адрес translate4future@gmail.com.

Приложение

1. Почему потребительские товары должны облагаться налогом на основе совокупных затрат труда?

В этом разделе мы обосновываем, почему сохраняющийся дисбаланс между спросом и предложением в СССР был не случайным, а неизбежным из-за отсутствия пропорциональности между налогообложением, платежеспособным спросом и совокупными затратами труда (ILC).

К. Маркс считал [57], что экономическое планирование не может иметь никакой другой основы, кроме потоков рабочего времени между различными отраслями производства: «Если предположить наличие коллективного производства, то определение времени, очевидно, становится существенным. [...] Экономия времени: вот к чему в конечном итоге сводится любая экономия. [...] Экономия времени и планомерное распределение рабочего времени между различными отраслями производства всегда являются первым экономическим законом, основанным на коллективном производстве». Разобьем экономику на три сектора:

(I) Производство средств производства.

(II) Производство средств индивидуального потребления, приобретаемых в общественных магазинах за трудовые сертификаты или иную систему оплаты труда.

(III) Предоставление общественных услуг, таких как медицина, образование, когда лицам нет необходимости использоваать трудовые сертификаты или другие формы вознаграждения за выполненную работу.

Обозначим конечный продукт (в рабочих часах) сектора (I) как m - товары производства (включая древесину, сталь, цемент и т. д.) или производственные товары, а через M_1, M_2, M_3 общее количество производственных товаров, используемых в секторах (I), (II) и (III) соответственно. Мы знаем, что производственные товары изнашиваются, давайте для простоты предположим, что часть $delta$ из них изнашивается каждый год. Тогда для поддержания каждого сектора в стабильном состоянии нам потребуется δM_1, δM_2, δM_3 человеко-часов в год соответственно. Если m_g — это окончательный годовой прирост m, мы имеем

$$m_g = m - (\delta M_1 + \delta M_2 + \delta M_3)\ . \tag{34}$$

Предположим, что общее количество работающих людей (обозначаемое как P) разделено на P_1, P_2, P_3 человек, работающих соответственно в секторах (I), (II) и (III). Чтобы сделать этот раздел как можно более общим, мы можем предположить любую систему оплаты труда, которая является единообразной и повсеместной, в которой выражаются остальные затраты и с помощью которой можно приобрести товары сектора (II), как это было с рублем в СССР.[63] Как только система вознаграждения труда установлена, все трудовые потоки должны быть выражены в этой общей единице. В противном случае отсутствует возможность координации различных отраслей экономики, т.е. эта

[63] Мы предлагаем отменить деньги и принять трудовые сертификаты в качестве единицы оплаты труда, но мы ссылаемся здесь на рубль, чтобы не терять общности.

единица должна стать единицей учета, на которой базируется экономическое планирование.

Для простоты предположим, что все рабочие дни равны. Обозначим через w заработную плату каждого работника[64] в выбранной системе вознаграждения. Мы будем называть c общие затраты, выраженные в выбранной единице учета, для производства m. Обозначим через C_1, C_2, C_3 соответствующие бухгалтерские издержки каждого сектора. Поскольку каждый сектор имеет в качестве расходов изношенные производственные товары и заработную плату людей, работающих в нем, мы имеем следующие уравнения

$$C_1 = c\delta M_1 + wP_1 \ , \tag{35}$$

$$C_2 = c\delta M_2 + wP_2 \ , \tag{36}$$

$$C_3 = c\delta M_3 + wP_3 \ . \tag{37}$$

Обозначим через b конечный продукт сектора (II) (в отработанных часах), а через p количество учетных единиц, которое представляет b. Для простоты предположим, что люди не в состоянии накапливать расчетные единицы в конце каждого года, другими словами, они не сберегают. Если t — ставка подоходного налога, мы имеем

$$pb = w(P_1 + P_2 + P_3)(1 - t) \ . \tag{38}$$

До этого момента c была переменной, полностью независимой от остальных. Тем не менее, правильный способ определить c — это разделить бухгалтерские затраты сектора (I) на количество рабочих часов, которые воплощает в себе конечный продукт того же сектора, формально:

$$c = C_1/m. \tag{39}$$

Чистое накопление новых производственных товаров и бухгалтерские издержки Сектора (III) финансируются за счет общей суммы собранных налогов и чистой «прибыли» Сектора (II)[65], т. е. имеем

$$cm_g + C_3 = tw(P_1 + P_2 + P_3) + pb - C_2 \ . \tag{40}$$

В результате имеем 8 свободных переменных $m_g, c, w, t, p, C_1, C_2, C_3$ и 7 уравнений, которые ограничивают наш выбор. Если государственные доходы зависят исключительно от налогов, то государственные цены должны соответствовать совокупным затратам труда. И наоборот, если налогов, собираемых государством, недостаточно для финансирования общественных услуг (сектор III), то цены на потребительские товары (сектор II) должны быть выше, чем совокупные затраты труда, что приводит к инфляционному эффекту.

[64] Все рабочие часы оплачиваются одинаково.

[65] При капитализме это неверно, поскольку необходимо добавить личное потребление капиталистов

До сих пор мы обсуждали только межотраслевые отношения, которые должны быть проверены в любой экономике, теперь давайте посмотрим на внутриотраслевые ограничения. Даже если предположить, что население остается постоянным, индивидуальное потребление сильно варьируется. Должны ли цены на каждый из продуктов в Секторе (II) соответствовать их соответствующим совокупным затратам труда, исключая, самое большее, колебания, возникающие в результате изменений в структуре спроса? Ответ — да, иначе корректировки, которые индивиды вносят в свои модели спроса, были бы несовместимы с априорным распределением рабочей силы для каждого типа товара.

Давайте рассмотрим это на простом примере. Предположим, что одна группа товаров народного потребления, например, столы, сильно обесценилась по сравнению с другой группой товаров, например, бутылками вина. Предположим, что цены на бутылки вина близки к их совокупным затратам труда, а стоимость столов составляет половину из совокупных затрат труда. Потребители могли бы переключить часть своего потребления с винных бутылок на столы. Предположим, например, что они решают сократить потребление винных бутылок на сумму, эквивалентную 5 миллионам рабочих часов, и вместо этого тратят их на столы. Учитывая, что цены на столы эквивалентны половине их совокупных затрат труда, может показаться, что тех 5 миллионов рабочих часов, которые идут на потребление столов (вместо винных бутылок), может быть достаточно, чтобы купить 10 миллионов рабочих часов столов. Однако, даже если рабочие, которые в прошлом произвели те 5 миллионов рабочих часов винных бутылок, были переведены на столовое производство, этого было бы недостаточно для производства 10 миллионов рабочих часов, требуемых для столов. В более общем плане, если цены не пропорциональны совокупным затратам труда и платежеспособному спросу, изменения в потребительских моделях,[66] подразумевал бы либо слишком большой спрос, чтобы удовлетворить его при помощи имеющейся рабочей силы, либо, в случае перехода от одного вида товара к товару с завышенной ценой, определенная часть рабочей силы становится избыточной.

Другие проблемы, которые могут возникнуть в результате субсидирования продуктов, заключаются, с одной стороны, в создании черных рынков, поскольку, как упоминалось выше, будет иметь место нехватка продуктов и даже их накопление определенными группами, а с другой стороны, возникнет двойственность цен на субсидируемые товары, поскольку реальная цена субсидируемых товаров будет реальной ценой за границей, а не местной ценой.

Одна из проблем, с которой настойчиво сталкивался СССР, была неизбежным следствием проводимой экономической политики. Урок очень прост для усвоения: мы должны уметь точно рассчитывать совокупные затраты труда на все виды товаров и распределять потребительские товары из общественных магазинов по эквиваленту их совокупных затрат труда, чтобы успешно координировать экономику без постоянных проблем дефицита и перепроизводства.

[66] А именно, когда они перестают тратить эквивалент определенного количества рабочих часов на один тип товара, чтобы тратить его на другой тип товара.

Список источников

1. Hayek, F. The Use of Knowledge in Society. *The American Economic Review* **35,** 519—30 (4 1945) (цит. на с. 2).
2. IPCC. Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Masson-Delmotte, V. et al. (eds.)]. (2021) (цит. на с. 3).
3. Agencia Estatal de Meteorología (AEMET). Nota Informativa ICOS-España nº1. https://izana.aemet.es/nota-informativa-icos-espana-no1-el-observatorio-de-izana-vuelve-a-registrar-en-mayo-2021-un-maximo-historico-en-la-concentracion-de-dioxido-de-carbono-co2-el-covid-19-no-ha-frenado-el-incremento-d-2 (2021) (цит. на с. 4).
4. Palomino, M. Industria Fabril y Crecimiento Económico de la Unión Soviética: una Mirada desde la Histórica Económica. **21,** 179 (2018) (цит. на с. 4).
5. Stalin, J. *Economic Problems of Socialism in the USSR.* (Foreign Languages Press, 1952) (цит. на с. 5).
6. Bettelheim, C. The Transition to Socialist Economy. 269—272 (1975) (цит. на с. 5).
7. Cockshott, P. & Cottrell, A. A More Critical Look at Market Socialism. (2009) (цит. на с. 5).
8. Wright, I. The social architecture of capitalism. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **346,** 589—620. ISSN: 0378-4371 (2005) (цит. на с. 5).
9. Dragulescu, A. & Yakovenko, V. M. Statistical mechanics of money. arXiv: arXiv:cond-mat/0001432 (2000) (цит. на с. 5).
10. Cockshott, P. & Cottrell, A. Valor, mercados y socialismo. https://cibcom.org/valor-mercados-y-socialismo (1997) (цит. на с. 5, 60).
11. O'Neil, J. Cálculo Socialista y Valoración Ambiental: Dinero, Mercado y Ecología. https://cibcom.org/calculo-socialista-y-valoracion-ambiental-dinero-mercado-y-ecologia (2021) (цит. на с. 6).
12. Benanav, A. Cómo fabricar un lápiz. https://cibcom.org/como-fabricar-un-lapiz/ (2020) (цит. на с. 6).
13. Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático.* 3ª edición (McGraw Hill, 1980) (цит. на с. 13).
14. Zhang, Y. Gaussian Elimination and Matrix Inverse. https://www.caam.rice.edu/~zhang/caam335/F14/handouts/gaussian_elimination.pdf (2010) (цит. на с. 13, 15).

15. Leontief, W. Quantitative Input and Output Relations in the Economic Systems of the United States. *The Review of Economics and Statistics* **18,** 105—125 (3 1936) (цит. на с. 17).

16. Leontief, W. *Input-Output Economics.* (Oxford University Press, 1986) (цит. на с. 17).

17. Leontief, W. Domestic Production and Foreign Trade; The American Capital Position Re-Examined. *Proceedings of the American Philosophical Society* **97,** 332—349 (4 1953) (цит. на с. 17).

18. Cockshott, P. & Cottrell, A. Calculation, Complexity y Planning: The Socialist Calculation Debate Once Again. (1993) (цит. на с. 17).

19. Cockshott, W. P. & Cottrell, A. *Towards a new socialism.* (Spokesman, Nottingham, England, 1993) (цит. на с. 18, 27).

20. Cockshott, P. Input-output or Harmony planning. https://paulcockshott.wordpress.com/2019/05/14/input-output-or-harmony-planning/ (2019) (цит. на с. 18).

21. Härdin, T. La solución del cálculo económico [6]: Programación entera mixta. https://cibcom.org/la-solucion-del-calculo-economico-6 (2022) (цит. на с. 18, 44).

22. Farjoun, E. *The Production of Commodities by Means of What?* в *Ricardo, Marx and Sraffa; The Langston Memorial Volume.* (1984), 11—43 (цит. на с. 18).

23. Farjoun, E., Machover, M. & Zachariah, D. How Labor Powers the Global Economy: A Labor Theory of Capitalism. (2022) (цит. на с. 18).

24. Y D. Zachariah, P. C. Classical labour values – properties of economic reproduction. *World Review of Political Economy* (2018) (цит. на с. 18).

25. Shaikh, A. & Antonopoulos, R. *Explaining long term exchange rate behavior in the United States and Japan.* (Routledge, 2013) (цит. на с. 19).

26. Nápoles, P. R. *Costos unitarios laborales verticalmente integrados por rama en México y Estados Unidos, 1970–2000.* (Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Economía, 2010) (цит. на с. 19).

27. Morishima, M. *Equilibrium stability, and growth: a multi-sectoral analysis.* Reprint. with corr. 227 с. (Clarendon Press, Oxford, 1978) (цит. на с. 22, 26).

28. Morishima, M. *Marx's economics: a dual theory of value and growth.* Reprinted. 198 с. (Cambridge Univ. Pr, Cambridge, 1977) (цит. на с. 24—26).

29. Horn, R. A. & Johnson, C. R. Matrix Analysis. (2013) (цит. на с. 26).

30. Stoer, J. & Bulirsch, R. Introduction to Numerical Analysis (2002) (цит. на с. 27).

31. Arandiga, F., Donat, R. & Mulet, P. Mètodes Numérics per a l'Àlgebra Lineal (2000) (цит. на с. 27).

32. Ortega, J. & Rheinboldt, W. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables (1970) (цит. на с. 27).

33. Atkinson, K. & Han, W. Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework (2009) (цит. на с. 27).

34. Amat, S. *и др.* Aproximació numèrica (2002) (цит. на с. 27).

35. Phillips, L. & Rozworski, M. *The People's Republic of Walmart: How the World's Biggest Corporations are Laying the Foundation for Socialism.* (Jacobin, 2019) (цит. на с. 30).

36. Nieto, M. Dynamic Efficiency in a Planned Economy: Innovation and Entrepreneurship Without Markets. *Science and society* **84,** 42—66 (1 2020) (цит. на с. 30).

37. Nieto, M. Entrepreneurship and Decentralised Investment in a Planned Economy: A Critique of the Austrian Reading. *Historical Materialism* (2021) (цит. на с. 30).

38. Bazaraa, M. & Jarvis, J. Linear Programming and Network Flows. (2004) (цит. на с. 36).

39. Kantorovich, L. Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. *Management Science* **6,** 366—422 (4 1939) (цит. на с. 36, 40).

40. Kantorovich, L. The Best Use of Economic Resources. (1965) (цит. на с. 40).

41. Shalizi, C. In Soviet Union, Optimization Problem Solves You. `www.crookedtimber.org/2012/05/30/in-soviet-union-optimization-problem-solves-you/` (2012) (цит. на с. 43).

42. West, D. K. Cybernetics for the command economy: Foregrounding entropy in late Soviet planning. *History of the Human Sciences* **33,** 36—51 (1 2020) (цит. на с. 43).

43. Schrijver, A. *Theory of linear and integer programming* (John Wiley & Sons, 1998) (цит. на с. 45).

44. Fujimoto, T. Non-linear Leontief models in abstract spaces. *Journal of Mathematical Economics* **15,** 151—156 (1986) (цит. на с. 45).

45. Samothrakis, S. Artificial Intelligence inspired methods for the allocation of common goods and services. *Plos one* **16,** e0257399 (2021) (цит. на с. 47).

46. Von Mises, L. The Equations of Mathematical Economics and the Problem of Economic Calculation in a Socialist State. *The Quarterly Journal of Austrian Economics* **26,** 229—234 (2016) (цит. на с. 49).

47. Von Mises, L. *Economic calculation in the socialist commonwealth.* (Lulu Press, Inc, 2016) (цит. на с. 49).

48. Cockshott, P. Von Mises, Kantorovich and in-natura calculation. *European Journal of Economics and Economic Policies: Intervention,* 167 (2010) (цит. на с. 49, 57).

49. Gockenbach, M. S. *Finite-dimensional Linear Algebra.* (CRC Press, 2010) (цит. на с. 52).

50. Axler, S. *Linear Algebra Done Right.* third edition (2015) (цит. на с. 52).

51. Gondzio, J. & Grothey, A. *Solving nonlinear financial planning problems with* 10^9 *decision variables on massively parallel architectures.* в *Computational Finance and its Applications II.* **43** (2006), 95 (цит. на с. 56).

52. Härdin, T. Towards large scale linear planning. https://www.xn--hrdin-gra.se/blog/2022/02/04/towards-large-scale-linear-planning (2022) (цит. на с. 57).

53. Bienstock, D. Potential Function Methods for Approximately Solving Linear Programming Problems: Theory and Practice. (2001) (цит. на с. 57).

54. Härdin, T. La solución del cálculo económico [1]. Cibernética, política y álgebra lineal dispersa. https://cibcom.org/la-solucion-del-calculo-economico-hardin1 (2022) (цит. на с. 57).

55. Nieto, M. в *Ciber-comunismo: planificación económica, computadoras y democracia.* 231 (2017) (цит. на с. 57).

56. Härdin, T. Prices and information. http://www.xn--hrdin-gra.se/blog/2021/11/14/prices-and-information/ (2021) (цит. на с. 59).

57. Marx, K. *Foundations of the Critique of Political Economy (Grundrisse): I.* Vigésima edición (Siglo XXI editores, 2007) (цит. на с. 63).