Matemática para planejar uma economia

Introduçao ao cálculo ciber-socialista

Título: Matemática para planejar uma economia

Subtítulo: Introdução ao cálculo ciber-socialista

Primeira edição: 2023

Versão: 1.0 (Com base na versão 1.2 em espanhol)

Traduzido por *O Minhocário*: `https://ominhocario.wordpress.com`

Publicado e distribuido por CibCom.

www.cibcom.org

info@cibcom.org

Índice

O propósito deste guia é ajudar todos os interessados a compreender os aspectos mais técnicos do emergente comunismo cibernético. Sobre ele, até agora, há alguns escritos mais introdutórios e outros muito avançados, [1] com uma notória ausência de quaisquer "pontes" entre eles. Na CibCom, pretendemos transcender esta situação; queremos orientar os recém-chegados nessa iniciativa escorregadia que é adentrar o território de questões matemáticas ou informáticas sem nunca termos nos especializado nelas, ou depois de não termos trabalhado com elas durante algum tempo. O público em geral poderá consultar este documento quando encontrar dificuldades na interpretação de uma ideia ou expressão algébrica num daqueles textos. Este trabalho acabou ficando especialmente extenso porque não quisemos pular nenhuma das explicações que são normalmente assumidas como já compreendidas nos tratados sobre este tema.

Em qualquer caso, antes de prosseguirmos naquilo que nos traz aqui hoje, vale a pena recordar o contexto que, por quase três séculos, tem proporcionado a razão de ser destas investigações.

1. Introdução

A planificação socialista da economia - a bandeira do ciber-comunismo - é uma das maneiras de organizar e coordenar a produção nas sociedades modernas, caracterizadas por uma divisão técnica do trabalho altamente desenvolvida. Diante dela se ergue, de maneira antagônica, a economia de mercado hoje predominante, a qual produz e reproduz no mundo uma realidade historicamente singular .

Na sociedade capitalista, caracterizada pela propriedade privada dos meios de produção, a coordenação consciente da economia é inexistente e a organização se dá no nível atómico (nas empresas). O "planejamento capitalista", apesar do quanto se beneficiou dos grandes avanços tecnológicos das últimas décadas, tem lugar apenas no interior de cada empresa e, mais importante, está fundamentalmente orientado para as expectativas de lucro. No nível inter-empresarial, na relação entre diferentes empresas privadas, não se trata do fato de não haver um planejamento harmonioso, e sim de que não existe planejamento nenhum. [2] Apenas *a posteriori*, e segundo a lógica do automatismo cego e impessoal do mercado, é que se consegue coordenar as diferentes unidades produtivas a fim de satisfazer as demandas das pessoas. Estas

[1] Ver a riquíssima literatura representada pelas obras originais de Otto Neurath, Wassily Leontief, Leonid Kantoróvich, Oskar Lange, Viktor Glushkov, Nikolay Veduta, Stafford Beer, Paul Cockshott e Allin Cottrell, Jan Philipp Dapprich, Spyridon Samothrakis, Tomas Härdin, etc.

[2] Os mais firmes defensores do capitalismo, os economistas austríacos, propagando um evidente espantalho, negam diretamente a própria *possibilidade* de uma coordenação consciente no nível social. A partir dos seus parâmetros, planificar (ou resolver o problema da atribuição numa economia socializada) implicaria necessariamente em deixar nas mãos de uma única autoridade o papel de tomar todas as decisões econômicas. Para isso, esta autoridade teria de ser omnisciente; ou seja, ela teria de ter acesso à informação econômica mais detalhada e conhecer a melhor utilização para cada um dos milhões de recursos que compõem a economia. Dada a óbvia impossibilidade de tal autoridade, os austríacos proporiam como única solução eficiente para o problema da atribuição o mecanismo descentralizado do mercado [1].

demandas (que por vezes se tratam das necessidades humanas mais básicas) serão satisfeitas, ou não, exclusivamente de acordo com o nível de renda de cada pessoa e com a disponibilidade de mercadorias que o nosso espaço nacional tenha na cadeia global de suprimentos.

	Mercado Capitalista	**Planificação Socialista**
Coordenação	Automática, via concorrência	Consciente, por meio de instituições políticas
Cálculo econômico	Monetário	Em espécie
Objetivo	Lucratividade privada	Necessidades sociais
Restrições climáticas	Introduzidas a partir de fora, rompendo com o seu funcionamento (externalidades negativas)	Aplicadas orgânicamente no própio processo de planejamento
Emprego	Segundo as necessidades do capital (desemprego estrutural)	Segundo a vontade individual e as necessidades sociais
Forma política	Parlamentarismo ou Ditadura militar / Estado burocrático encarregado de assegurar a acumulação de capital	Democracia Direta / Comuna

Tabla 1: Tabela comparativa entre sistemas.

Aquilo que os apologistas do capitalismo nos vendem como sendo uma organização racional da produção, se revela como algo radicalmente problemático devido às suas dinâmicas intrínsecas, com resultados desastrosos tanto para a humanidade como para o meio-ambiente. Muitas das características da nossa realidade econômica, como a extrema desigualdade de renda e as recessões, são consequências necessárias das relações sociais de produção e, portanto, propriedades duradouras e essenciais do capitalismo, ao invés de acidentais ou transitórias. Apesar dos prognósticos dos defensores do mercado, tudo isso continua ocorrendo, com os imensos dramas humanos acarretados.

Essas dinâmicas são a fonte de incontáveis conflitos políticos. A polarização permeia as nossas sociedades e é exacerbada a cada nova crise. A incapacidade de se exercer um controle social sobre a atividade econômica atomizada se materializa na absoluta prostração das "democracias liberais" diante dos desígnios e necessidades do capital. Todas elas são, por si só, razões suficientes para que investiguemos a possibilidade de uma alternativa organizacional consciente e democrática. Não obstante, por detrás de todas elas assoma, com ainda mais urgência, a necessidade de evitar que o capitalismo deteriore a capacidade do planeta de sus-

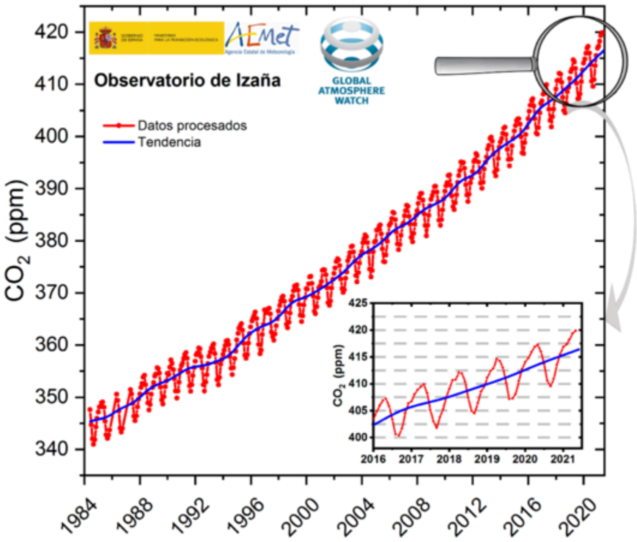

Figura 1: Médias mensais de concentração de CO_2 (em ppm) (pontos vermelhos), junto com a tendência do CO_2 (linha azul)[3].

tentar a vida.

Apesar do nosso planeta ter dinâmicas que permitem a renovação de recursos imprescindíveis para sustentar qualquer forma de vida, a produção de mercadorias excede constantemente os seus limites biofísicos. A longo prazo, este sistema constitui um perigo para a continuidade da vida humana. As mudanças climáticas e a limitação dos recursos estão apenas começando a manifestar-se. A nossa situação atual não passa de uma antesala do que está por vir: as primeiras crises de escassez, grandes dificuldades para a agricultura em várias zonas do planeta, emissões cada vez maiores dos gases do efeito estufa, regiões inteiras se tornando áridas e inundações em outras, etc. [2] A isto soma-se o colossal desperdício de recursos que ocorre todos os anos pela proporção de bens que não conseguem ser trocados. Este será o maior desafio global que a humanidade terá de enfrentar em sua curta mas frenética história - um desafio que o próprio mercado gerou e do qual dificilmente poderá nos salvar. A sua imperiosa necessidade de crescimento torna o capitalismo incapaz de enfrentar esse desafio; o seu comportamento revela-se, à luz deste novo perigo, ainda mais irracional e nocivo.

Apesar das evidências, economistas, políticos, intelectuais, social-democratas, liberais e outras tendências políticas tentam há anos encontrar soluções que, de alguma maneira, eliminem magicamente os efeitos "negativos" do mercado sem alterar aquilo que consideram ser o maior êxito do capitalismo, a acumulação; ou seja, sem alterar a sua natureza. Desta forma, evitam ter de pensar e aceitar as dificuldades de se transformar a base econômica da sociedade. No entanto, eles não parecem estar conseguindo resolver nenhum desses problemas: os avanços momentâneos do movimento operário estão em pleno recuo com o desmantelamento do chamado "estado de bem-estar social"; o desemprego persiste e as crises sociais continuam na ordem do dia; a poluição continua a agravar-se e a transição energética não progride como previsto; a acumulação capitalista sofre repetidas limitações e o descontentamento incentiva as forças políticas que corroem as instituições fundamentais para sustentar a reprodução do capital.

Nossa proposta é atacar o problema pela raiz: propomos a alternativa de um planejamento democrático, consciente e racional da economia, para que seja possível enfrentar estes e outros desafios, mas também para podermos escolher livremente o nosso destino como sociedade. Seria isso por acaso uma quimera utópica, como nos vendem diariamente os grandes meios de comunicação capitalistas? Isso já não foi tentado anteriormente, com resultados desastrosos? O planejamento não é uma ideia novíssima, surgida nas últimas décadas. O movimento tabalhador tem considerado a opção de uma economia planificada em oposição à desordem capitalista desde o século XIX. Estas ideias podem ser rastreadas através das diferentes expressões organizacionais e políticas da nossa classe, especialmente nas I, II e III Internacionais. O triunfo da Revolução de Outubro permitiu que, a partir do final da segunda década do século XX, fosse levada a cabo a mais ambiciosa aproximação do planejamento econômico de toda a história, na União Soviética.

Depois de enfrentar uma contra-revolução armada em uma guerra civil sangrenta e destrutiva que durou 6 anos, a economia soviética encontrava-se em condições absolutamente precárias. Após um curto período de Nova Política Econômica com elementos capitalistas, o contexto de isolamento internacional e a necessidade de um rápido desenvolvimento industrial levaram os soviéticos a tentar organizar racionalmente uma economia nacional centrada na auto-suficiência. Este desafio era imenso: tratava-se de uma gigantesca extensão territorial onde o capitalismo havia sido implantado apenas parcialmente , com relações sociais mais próximas do feudalismo [4]. No primeiro plano quinquenal de 1928, o objetivo era transformar uma economia predominantemente agrária em uma economia com uma forte base na indústria pesada. Nessa etapa, a sociedade soviética experimentou um rápido crescimento de riqueza: "A renda nacional soviética, a preços constantes de 1928, cresceu mais de 60%" entre 1928 e 1933 [4]. A planificação econômica conseguiu estabelecer a URSS como uma potência mundial, apesar do seu óbvio atraso inicial e de ter de simultaneamente repelir os nazistas, naquela que foi uma das invasões mais destrutivas de que se tem memória.

Entretanto, após as significativas realizações dessa primeira fase de planificação, em breve surgiriam problemas na organização de uma economia cada vez mais diversificada e complexa - problemas como a escassez e a falta de coordenação nas cadeias produtivas que a URSS iria experimentar até o seu desmantelamento nos anos 90. Isto se deve, em parte, aos métodos de planejamento insatisfatórios adotados naquele momento, diante da ausência de capacidade computacional. A título de resumo, podemos dizer que, sem a capacidade para processar de maneira eficaz as informações econômicas por meio de cálculos eletrônicos, o sistema soviético sofria dos seguintes três problemas:

1. Uma vez que o órgão de planejamento não conseguia calcular o quanto custava em mão-de-obra direta e indireta para se produzir cada bem, os preços destes bens acabavam sendo fixados com base em critérios subjeivos ("o mais básico", o mais barato, "o mais supérfluo", o mais caro, etc.). [5, 6]. Assim, bens que eram relativamente difíceis de se produzir eram vendidos a preços bem abaixo do seu custo, levando ao desabastecimen-

to do lado dos consumidores e a desajustes na contabilidade do Estado. Este ponto é discutido em maiores detalhes no Apêndice A.

2. O planejamento não partia da demanda real da sociedade, mas sim do estabelecimento de objetivos de produção bruta (em toneladas de carvão, ferro, etc.). Em outras palavras, não se consideravam os produtos finalizados consumidos pela população para se determinar as quantidades necessárias de matérias-primas; ao invés disso, era estimada uma quantidade base de matérias-primas, a fim de gradualmente se produzir diferentes bens até que estes chegassem, na medida do possível, às mãos das pessoas. Isto resultava num grande desperdício de recursos humanos e materiais que, no longo prazo, acabou sobrecarregando os soviéticos.
3. Como consequência, se conservou a utilização do dinheiro como unidade de cálculo e método de pagamento. Isto é problemático não apenas porque, como demonstram [7], [8] y [9], isso acaba gerando altas desigualdades de maneira espontânea e, por conseguinte, conflitos políticos incompatíveis com a verdadeira democracia que almejamos, mas também devido a uma questão mais profunda: que informações fornecem as expressões monetárias ou os preços de mercado? Sendo generosos, a quantidade relativa de trabalho socialmente necessário para se produzir um bem e sua escassez relativa [10]. Questões como quanta poluição é gerada na produção de um bem, o tempo necessário para que os ecossistemas regenerem uma matéria-prima ou o sofrimento produzido nos trabalhadores são agrupados na categoria das "externalidades negativas", incorrendo numa perda sistemática de informações que prejudica a operação do sistema.

Diante do progressivo desgaste gerado por estas insuficiências do planejamento não informatizado, a restauração do sistema mercantil foi abrindo seu caminho na URSS através de várias reestruturações. Desde a "reforma Kosygin" até a culminação deste processo sob a Perestroika, as conquistas do socialismo soviético foram sendo gradualmente revertidas até sua destruição e posterior substituição pela barbárie nacionalista e neoliberal que hoje domina as atuais ex-repúblicas soviéticas.

A situação atual é bem diferente. As inovações tecnológicas das últimas décadas, juntamente com o estudo dos problemas da planificação nos países socialistas, possibilitaram uma teorização do planejamento sem precedentes. A democracia direta e o *cálculo em espécie* emergem como pilares fundamentais: em vez de reduzir a racionalidade econômica a uma variável unidimensional como a lucratividade monetária, a contabilidade em unidades físicas, integrada em algum sistema de deliberação pública, permite que se assuma organicamente critérios multidimensionais tais como recomendações científicas (ecologia, saúde pública, etc.) e valores ético-políticos (dignidade laboral, justiça intergeracional, solidariedade internacional, etc.) [11, 12]. Como dizíamos no princípio, com o propósito de ajudar a compreender estas novas técnicas de coordenação, este documento pretende ser uma introdução à expressão formal das mesmas.

Em particular, este artigo abordará três tópicos principais: cálculo matricial, otimização (ou programação linear) e complexidade computacional. Cada um destes tópicos visa responder, respectivamente, a problemas de *logística* (como garantir que seja produzido exatamente aquilo que se demanda), *desenvolvimento* (como atualizar a nossa produção em relação a situações sociais e tecnológicas em tansformação) e de *viabilidade* (como ter a certeza de que os cálculos sejam realizados num tempo razoável e com suficiente aproximação).

Cabe aqui esclarecer que ao nos mantermos no âmbito “técnico” do planejamento – isto é, nos campos da matemática e da informática – estamos intencionalmente omitindo todos os requisitos político-jurídicos igualmente necessários para a organização consciente e democrática da produção de bens e serviços. Esse tópico por si só é bastante amplo, e seguiremos tratando dele em artigos futuros.

Planejemos!

2. Cálculo matricial

Provavelmente o leitor já se perguntou mais de uma vez sobre por quais processos produtivos tem de passar um produto, por exemplo um telefone celular, antes de chegar à nossa casa ou em uma loja num estado funcional. Como pode imaginar, é um processo tremendamente complexo, que inclui desde a geração de energia e extração mineral até a fabricação dos semicondutores e dos plásticos utilizados, entre muitas outras coisas.

O mercado não coordena de diretamente todos esses processos como um todo, todavia, apesar da sua atomicidade, é capaz de vincular as diferentes unidades produtivas no nível mundial para satisfazer uma demanda efetiva. Os mecanismos básicos através dos quais o seu metabolismo social é regulado são: 1) a disciplina exercida pela concorrência entre as empresas e 2) o sistema de preços e os fluxos do dinheiro. Estes, juntamente da retroalimentação que geram, resultam em uma rede de sinais e fluxos de informação capaz de incorporar de forma indireta os custos materiais sociais nos custos monetários das mercadorias.

Nossa proposta pretende superar estes mecanismos e ser no mínimo tão eficaz quanto eles na organização do processo produtivo. Coloquemo-nos por um momento no lugar do comitê de planificação designado para coordenar a economia como um todo, dentro dos parâmetros decididos pelos cidadãos. Como farão estes funcionários públicos para organizar corretamente a distribuição e a produção de recursos? Como poderão resolver *problemas logísticos de abastecimento e de estoque*, de tal maneira que não se gere escassez, na ausência de concorrência? Para isso, é necessário ser capaz de capturar e tratar cientificamente as relações entre as diferentes unidades produtivas. Consequentemente, no mínimo, deve ser capaz de calcular os custos sociais de produção de cada tipo de bem de forma direta e precisa, e não como o resultado de leis que escapam ao controle consciente dos seres humanos. Pois bem, para se conseguir fazer isso e captar o metabolismo social é agora possível utilizar aquilo que se denomina como uma "matriz tecnológica". Graças a ela poderemos saber, de uma forma muito mais rigorosa do que nos tempos da URSS, a avaliação adequada para cada bem, assim como a quantidade de recursos que são necessários ao longo do seu processo produtivo. Mas para podermos definí-la, devemos primeiro explicar o conceito de matriz e as suas propriedades.

2.1. O que são matrizes e o que podemos fazer com elas?

Uma matriz não é nada mais e nada menos do que um arranjo bidimensional de números - ou seja, um conjunto de números ordenados em linhas e colunas. Formalmente, uma matriz A com n linhas e m colunas é definida como

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

ou, de maneira abreviada, $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots n, j=1,\ldots m}$; observe que $a_{i,j}$ é simplemente o número que ocupa a i-ésima linha e a j-ésima columna. Diremos neste caso que A é uma matriz $n \times m$.

O leitor não deve se assustar com tantos subscritos, porque a ideia por detrás destes objetos é bem simples: uma matriz é uma tabela (ordenada) de números. Para se conhecer a posição de qualquer elemento de uma tabela, basta conhecer sua linha e sua coluna. Por si mesma, uma matriz não significa nada, mas isso não significa que não possamos dar-lhe um significado. Uma matriz com uma única linha e coluna pode ser entendida como um número. Por outro lado, para definir um ponto geográfico no globo terrestre, um único número não é suficiente, necessitamos de pelo menos dois (latitude e longitude), que poderiam ser representados por uma matriz com uma linha e duas colunas ou com duas linhas e uma coluna. Outro exemplo de utilização de matrizes, mas com mais filas e colunas do que antes, seria a informação de um catálogo com 20 modelos de carros classificados por 5 características diferentes: peso, altura, potência, número de portas e preço. Essas informações poderiam ser condensadas em uma matriz com 20 linhas e 5 colunas, ou com 5 linhas e 20 colunas, dependendo da escolha do leitor: não há nenhuma razão matemática para se escolher uma das duas opções; no entanto, a primeira opção é a que seria mais comum para um catálogo.

Um tipo muito especial de matrizes que são amplamente utilizadas no nosso dia-a-dia são as matrizes de uma única linha e duas colunas, uma vez que, como já dissemos, podem representar pontos em um plano. Por exemplo, $\mathbf{p} = [1, 2]$ seria, ajustado a uma unidade de distância, o ponto do plano cuja latitude é 1 e cuja longitude é 2. Assim, os pontos poderiam ser representados em um mapa. Em geral, as *matrizes linha* são matrizes com uma única linha e as *matrizes coluna* são matrizes com uma única coluna; estes tipos de matrizes são chamadas *vetores linha* e *coluna*, respectivamente. Outro tipo peculiar de matrizes são aquelas com o mesmo número de linhas e colunas, que são chamadas de *matrizes quadradas*, e possuem propriedades matemáticas especialmente importantes.

Agora que sabemos o que é uma matriz, vamos ver as operações em que ela pode estar envolvida.

2.1.1. Soma de matrizes

A primeira operação que pode nos ocorrer é a soma de matrizes. Como poderíamos definir esta operação? Primeiramente observamos que adicionar matrizes com números diferentes de linhas ou de colunas não parece muito significativo. A seguinte definição de adição de matrizes requer que ambas as matrizes envolvidas tenham exatamente o mesmo número de linhas e colunas. Formalmente, sejam A e B matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \ldots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \ldots & b_{n,m} \end{bmatrix},$$

então definimos a *matriz soma* de A e B como sendo

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} & \dots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} & \dots & a_{2,m} + b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & a_{n,3} + b_{n,3} & \dots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz soma é a matriz cujo elemento na i-ésima linha e na j-ésima coluna é a soma dos respectivos elementos de A e B que ocupam essa posição. Não há nenhum mistério, somar matrizes é simplesmente escrever a matriz cujos elementos são as somas, "célula" a "célula" [3] das matrizes envolvidas. Note-se que $A + B = B + A$, ou seja, a soma de matriz é uma operação comutativa.

De forma semelhante, podemos definir a subtração de matrizes:

$$A - B := \begin{bmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & a_{1,3} - b_{1,3} & \dots & a_{1,m} - b_{1,m} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & a_{2,3} - b_{2,3} & \dots & a_{2,m} - b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} - b_{n,1} & a_{n,2} - b_{n,2} & a_{n,3} - b_{n,3} & \dots & a_{n,m} - b_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Um exemplo concreto desta operação seria

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3{,}1 & 9 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 & 4 & 3 \\ 0{,}1 & -11 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 6 \\ 3{,}2 & -2 & 35 \end{bmatrix}.$$

2.1.2. Produto de matriz por um escalar

Seja w um número real qualquer, então definimos o produto de um número por uma matriz da seguinte maneira:

$$wA = Aw := \begin{bmatrix} wa_{1,1} & wa_{1,2} & wa_{1,3} & \dots & wa_{1,m} \\ wa_{2,1} & wa_{2,2} & wa_{2,3} & \dots & wa_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ wa_{n,1} & wa_{n,2} & wa_{n,3} & \dots & wa_{n,m} \end{bmatrix},$$

ou seja, o conteúdo de cada célula é multiplicado pelo escalar w (que nada mais é do que um número constante - por exemplo, $w = 4$). Poderíamos dizer que, ao multiplicar a matriz por um escalar, estamos literalmente "ajustando a escala" de toda a matriz por esse número, daí o nome. Note-se que como o produto de dois números reais é comutativo, a multiplicação escalar de uma matriz também é.

[3] Às vezes, as matrizes são referidas pelo nome de *tabelas*, cujos elementos se encontram dentro de *células*. Estes aspectos técnicos são especialmente comuns em domínios relacionados com a informática.

2.1.3. Produto de matrizes

A próxima operação entre matrizes que se pode pensar é a multiplicação ou produto de matrizes. A soma de matrizes e a multiplicação escalar foram definidas no formato "célula" por "célula", contudo, este NÃO é o caso para a multiplicação de matrizes.[4] A razão pela qual a definição padrão da multiplicação de matrizes não segue esta regra pode não ser óbvia ao princípio, mas, ainda assim, é a definição mais útil devido à sua íntima relação com as equações lineares e os mapeamentos.

Recordemos que estamos definindo operações entre matrizes; se garantirmos que essas operações estejam bem definidas, tudo é válido como definição, mas se elas nos são úteis ou não é outra questão. Para um matemático não faz sentido questionar as definições em si, elas não precisam ser provadas, apenas a sua consistência e as suas propriedades. Antes de definir o produto de matrizes em geral, vamos defini-lo para casos específicos. Vamos definir o produto de uma matriz A com n linhas e m colunas por uma matriz coluna (ou vetor coluna) $\mathbf{x}$ com m linhas:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + a_{j,3}x_3 + \ldots + a_{j,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,m}x_m \end{bmatrix}.$$

O leitor não precisa entrar em pânico! A regra é muito simples: 1) pegar a primeira linha da matriz e multiplicá-la pelo vetor, elemento por elemento, e somar os resultados; 2) colocar o resultado da soma na primeira linha do vetor coluna resultante; 3) repetir a operação com as seguintes linhas da matriz (mas colocando o resultado do primeiro passo na linha correspondente do vetor coluna resultante).

Un exemplo concreto de produto de matriz por vetor seria

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}40 \\ 0{,}50 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \cdot 2 + 0{,}40 \cdot 3 \\ 0{,}50 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 \\ 1{,}75 \end{bmatrix}.$$

A partir de uma matriz com n linhas e m colunas e um vetor coluna (com exatamente m linhas), obtemos um vetor coluna com n linhas.

Prosseguindo, passamos à definição da multiplicação de matrizes em geral, da qual a multiplicação matriz-vetor é um caso particular. Sejam A uma matriz com n linhas e m colunas e B uma matriz com m linhas e p colunas. Se escrevermos

[4] Embora exista uma definição de produto que funciona de maneira semelhante à soma, chamada de produto de Hamadard, utilizada no algoritmo JPEG.

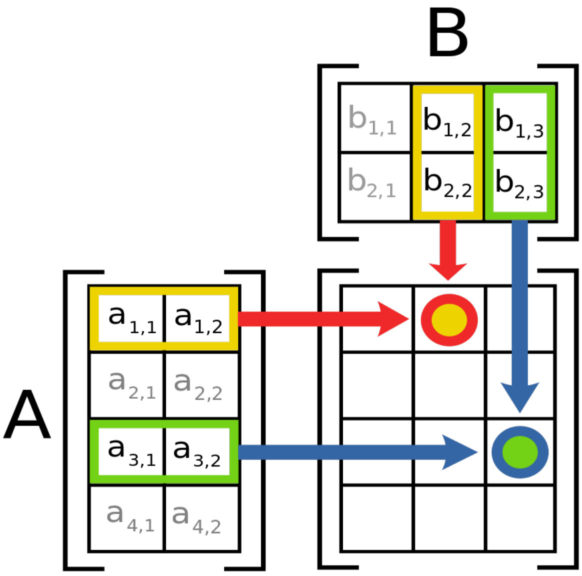

Figura 2: Ilustração gráfica do produto de matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,p} \end{bmatrix},$$

então definimos a multiplicação de A por B como sendo a siguente matriz de n linhas e p colunas:

$$AB := \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,p} \end{bmatrix},$$

onde $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j} + \dots + a_{i,m}b_{m,j}$
para todo $i = 1, .., n$ e $j = 1, ..., p$,
ou seja, o elemento que ocupa a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz do produto é a soma das multiplicações elemento por elemento da i-ésima linha de A pela j-ésima coluna de B. Observamos que 1) para que esta definição faça sentido, o número de colunas de A deve coincidir

com o número de linhas de B e 2) a matriz resultante possui o mesmo número de linhas que A e o mesmo número de colunas que B. Consequentemente, se o número de linhas de A não coincidir com o número de colunas de B, então a multiplicação BA não está bem definida e, portanto, a propriedade comutativa não é verdadeira, em geral. Não obstante, poderíamos nos perguntar se no caso de A e B terem n linhas e n colunas, seria válida a propriedade $AB = BA$? A resposta, ao contrário do que ocorre na soma das matrizes, é negativa: em geral, o produto de matrizes não tem comutatividade. Vejamos dois exemplos simples deste fenômeno. O primeiro:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + (-3)\cdot 3 & 2\cdot 10 + (-3)\cdot(-1) \\ 7\cdot 0 + 5\cdot 3 & 7\cdot 10 + 5\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 23 \\ 15 & 65 \end{bmatrix},$$

enquanto que

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 + 10\cdot 7 & 0\cdot(-3) + 10\cdot 5 \\ 3\cdot 2 + (-1)\cdot 7 & 3\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 50 \\ -1 & -14 \end{bmatrix}.$$

O segundo exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

enquanto que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.4. Matriz identidade e matriz inversa

Definimos a matriz identidade de dimensão n como

$$I_n := \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ colunas}},$$

ou seja, a matriz quadrada cujos elementos diagonais (aqueles que ocupam a linha com o mesmo númro da coluna, ou seja, os elementos da forma $a_{i,i}$) são uns e que tem o resto das entradas nulas. Observe que para uma matriz identidade I,[5] é válido que $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todos os vetores

[5]Com I vamos nos referir a qualquer matriz de identidade.

coluna $\mathbf{x}$, daí o seu nome.

Diremos que C é a matriz inversa de A caso se verifique que

$$AC = CA = I\ . \tag{1}$$

A seguir veremos que existe no máximo uma única matriz inversa para qualquer matriz quadrada, pelo que se justificará se referir à matriz A^{-1} que verifica

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

como sendo *a* matriz inversa de A. Com efeito, se C_1 e C_2 verificam (1) (ou seja, se houverem duas matrizes C_1 e C_2 para as quais a equação (1) é válida para uma matriz A), então

$$C_1 = C_1 I = C_1(AC_2) = (C_1 A)C_2 = IC_2 = C_2\ ,$$

onde levamos em conta que $F(GH) = (FG)H$ para quaisquer matrizes quadradas F, G, H de mesma dimensão. [6] É possível provar que se A^{-1} existe, então A é uma matriz quadrada. Se houver A^{-1} e B^{-1}, então é válido que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.[7]

2.1.5. Matriz transposta

Dada uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

definimos a matriz *trasposta* de A como sendo

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

[6] Esta propriedade é chamada associatividade e deve ser provada. Sua prova é trabalhosa, mas simples. Uma maneira alternativa seria utilizar o fato de que uma matriz representa uma função linear, que o produto de matrizes representa a composição das funções lineares correspondentes, e que a composição de funções satisfaz a propriedade da associatividade de maneira trivial.[13, Capítulo 9].

[7] Em [14] podemos consultar um algoritmo elementar para se calcular a matriz inversa de A (se ela existir) usando o *método de eliminação Gaussiana* utilizado para resolver sistemas de equações lineares e que será explicado e terá a sua complexidade computacional provada na Seção **??**.

ou seja, A^T é a matriz A "trocando as linhas pelas colunas". É evidente que $(A^T)^T = A$. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou se

$$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_m],$$

então

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

2.1.6. Relação entre as soluções de sistemas de equações lineares e as matrizes inversas

Antes de concluir esta seção, vejamos a relação que existe entre matrizes inversíveis e sistemas de equações lineares com solução única. [8] Comecemos com um exemplo particularmente simples. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Como poderíamos expressar estas relações de maneira matricial? Podemos expressar o sistema (2) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, se consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, isto é, a matriz cujos elementos são os coeficientes do sistema de equações lineares e $\mathbf{c} = [1, 1]^T$, resulta que o sistema (2) pode ser representado como

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{c}.$$

Se resolvemos o sistema (2) por meio da soma da primeira equação com a segunda, obtemos $2x = 2$ e, portanto, $x = 1$ e $y = 0$. Por outro lado, há outra forma interessante de resolver esse problema: aplicando o método descrito em [14] ou na Seção 4.3, obtemos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$.

[8] Conhecidos como sistemas de equações lineares compatíveis e determinados.

Manipulando a equação (2.1.6) multiplicando ambos os lados por A^{-1} pela esquerda, temos que:

$$A^{-1}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Resulta que $A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que é a solução que já havíamos obtido anteriormente.[9] Isso não se trata de uma coincidência. Vejamos a seguir o caso geral do fenômeno que acaba de ocorrer. Consideremos o seguinte sistema de equações lineares com incógnitas $x_1, \ldots, x_m$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = y_n \end{cases} \tag{3}$$

com $a_{i,j}$, y_i dados para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Ocorre que (3) equivale a resolver o problema de encontrar o vetor coluna x tal que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \, , \tag{4}$$

com $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}$ e $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T$.

Observe que se A^{-1} existe, multiplicando ambos os lados da equação (4) por A^{-1} pela esquerda, obtemos que $A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ e, portanto $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ é a solução de (3).

Este método de resolução de sistemas pode a princípio parecer complicado ou maçante demais para ser utilizado ao invés do método padrão, simbólico e manual, mas é interessante observar que ao alterarmos os valores de $y_1, \ldots, y_n$ em (3), não é necessário voltar a resolver o novo problema a partir do zero, uma vez que podemos aproveitar o fato de que A^{-1} já estará calculada e que, portanto, só seria necessário realizar uma única multiplicação de matriz por vetor. Assim, caso seja necessário resolver vários sistemas com os mesmos coeficientes, provavelmente pouparíamos tempo utilizando o segundo método.

Outra razão para a utilização do segundo método é que as soluções (ou a falta delas) são obtidas em um número finito de operações aritméticas básicas entre os coeficientes $a_{i,j}$ e os termos independentes $y_1, \ldots, y_n$ de qualquer sistema de equações lineares. Os computadores não são capazes de resolver equações em modo simbólico como nós fazemos, mas são capazes de armazenar matrizes e vetores e realizar operações sobre eles de forma *muito* eficiente. [10]

Agora que já temos alguma compreensão das operações com matrizes, estamos preparados para dar uma olhada em algumas das importantes aplicações que as matrizes (e a álgebra linear como um todo) têm no campo da ciência econômica e, em particular, do planejamento

[9] O leitor mais cético poderá comprovar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

[10] Ver BLAS.

econômico.

2.2. Por que as matrizes são importantes para a nossa proposta?

Como já discutimos anteriormente, o sistema utilizado pela URSS possuia pelo menos dois problemas importantes e inevitáveis. A incapacidade de responder a estes problemas levou a um descrédito da economia planificada, que serviu em grande parte como "bônus" para aqueles que defendiam a incorporação de reformas de orientação capitalista, que só agravaram os problemas e pioraram a qualidade de vida das pessoas. Vamos tentar ilustrar como a matemática moderna, e em particular o cálculo matricial, fornece uma resposta a ambos os problemas descritos acima e como serve de base para uma economia planejada. Neste artigo, o nosso objetivo não é tratar o planejamento socialista em toda a sua complexidade, com todas as suas nuances, mas apenas ilustrar a matemática básica que forma parte da solução dos problemas acima mencionados e que constitui a base para investigações mais aprofundadas sobre ela.

Nesta seção vamos trabalhar sob certas premissas, que discutiremos posteriormente, a fim de simplificar o tratamento matemático. Estamos conscientes de que uma economia real exige que levemos em conta muito mais nuances, mas como já mencionamos, o que mais nos interessa neste momento é ilustrar as ferramentas matemáticas básicas necessárias para o planejamento de uma economia moderna. No entanto, vamos fornecer algumas referências e observações sobre o tratamento dos casos mais gerais.

O método que vamos descrever a seguir é inspirado por e generaliza as análises realizadas por W. Leontief, pelas quais recebeu em 1973 o Prêmio de Ciências Econômicas do Banco da Suécia em Memória de Alfred Nobel (em sueco, *Sveriges riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne*). O seu método de análise da economia, que por sua vez se inspirava em François Quesnay, Leon Walras, Karl Marx e no planejamento soviético, é chamado de "método de insumos-produtos", que sucintamente consiste em utilizar álgebra matricial para descrever as relações inter-setoriais de uma economia em equilíbrio geral. [11] [12] O leitor interessado nas obras onde Leontief descreve e utiliza o seu poderoso método pode consultar [15], [16] e [17].

Suponhamos uma economia fechada (ou seja, sem fluxos com nenhum agente externo) com m tipos de artigos diferentes, com os primeiros n tipos de artigos correspondendo aos bens de produção (madeira, aço, maquinário industrial,...etc) e os restantes $m - n$ tipos de artigos aos bens de consumo (*milkshakes* de chocolate, medicamentos, ataduras,...etc).[13] Além disso, vamos assumir que

[11] A noção de equilibrio geral significa, informalmente, que a oferta e a demanda de todos os tipos de bens coincidem.

[12] É interessante notar que W. Leontief trabalhava com preços de mercado, não com categorias mais profundas que são independentes da esfera de circulação, como faremos a seguir.

[13] Os bens de consumo são aqueles que não são usados para se produzir outros bens.

(a) Cada setor produz somente um tipo de bem, portanto não há produtos intermediários intra-setoriais.[14]

(b) Não há treinamento ou educação que os trabalhadores possam adquirir, seja para fazer certos trabalhos que de outra maneira não poderiam realizar, ou para maximizar sua produtividade.[15]

(c) Todos os bens de produção possuem o mesmo "tempo de vida", que é medido como uma unidade. O desgaste do maquinário pesado, da infraestrutura das fábricas ... etc não será levado em conta.[16]

(d) Todos os tipos de bens exigem o mesmo tempo de fabricação, que é medido como uma unidade de tempo.[17]

(e) No há diferentes técnicas de produção disponíveis para cada tipo de bem.

Ainda que todas as outras premissas tenham solução, a última é especialmente problemática. Basta ter assistido *Breaking Bad* para saber que um determinado produto pode ser produzido de diferentes maneiras. Todas essas técnicas alternativas podem ser comparadas em termos de eficiência com base nos custos de mão-de-obra integrados (que definiremos mais à frente) [18] e nas quantidades de cada tipo de artigo que se deseja obter como produto final (representado pela demanda final). Em qualquer caso, esta questão crucial está além dos propósitos deste artigo. O leitor interessado em saber como tratar este fenômeno pode consultar [22], [23], [24] onde a questão é discutida sucintamente. Há vários autores, tais como Tomas Härdin e David Zachariah, que estão estudando estas questões em profundidade.

Vamos chamar de $a_{j,i}$ à *quantidade de unidades* do tipo de bem j [19] necessárias para se produzir uma unidade do tipo de bem i [20] e por ℓ_i a *quantidade de horas de trabalho direto necessárias* para se montar uma unidade do tipo de bem i. Assim, a produção do tipo de bem i é caracterizada pelo vetor $[a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}, \ell_i]$, que representa os insumos necessários e o trabalho de montagem desses insumos para se produzir, após um certo período (de produção), uma unidade do tipo de bem i.

[14] Esta premissa não é difícil de se corrigir - por exemplo, o leitor pode consultar [18].

[15] O leitor interessado en tratar este aspecto pode consultar [19, Capítulo 2].

[16] O leitor interessado pode ler [20] para mais informações a este respeito. Em [19] o desgaste (desigual) dos maquinários é levado em consideração e não representa uma grande dificuldade.

[17] Ver [21], onde esse ponto é tratado brevemente. Serão necessárias análises aprofundando este aspecto, pois se trata de uma variável importante além dos "custos de mão-de-obra integrados" e das considerações ambientais e que vem sendo pouco abordada.

[18] O leitor mais entusiasmado poderia replicar que uma certa técnica pode ser mais eficiente que outra se o conjunto escolhido de técnicas para produzir o resto dos tipos de bens for diferente, e estaria correto.

[19] As unidades dos $a_{j,i}$ são unidades físicas fixadas com antecedência. Por exemplo, se o tipo de bem j fosse pão, poderíamos usar o quilo ou a grama como unidade de referência.

[20] Uma vez que a economia tenha sido desagregada por setores, $a_{j,i} = \frac{z_{j,i}}{x_i}$ sendo $z_{j,i}$ a quantidade de bens produzidos no setor j que são insumos para o setor i (em uma economia capitalista a unidade de $z_{j,i}$ e do resto das variáveis pode ser monetária) e x_i sendo a quantidade total de bens produzidos no setor i. Esta seria uma forma prática de calcular os $a_{j,i}$.

A quantidade de trabalho que uma unidade do bem de tipo i incorpora é a soma do trabalho direto empregado em sua produção ℓ_i e do trabalho "guardado" nos insumos utilizados. Chamaremos esta quantidade de λ_i, o *custo de mão-de-obra integrado* (CMOI) do $i-$ésimo bem.[21] A seguir veremos como podemos calcular os CMOI de todos os bens, começando pelos CMOI dos bens de produção.

Vejamos un exemplo ilustrativo de como tudo isso funcionaria em uma economia simples.

2.3. Exemplo simplificado de economia comunal neandertal

Vamos imaginar que pertencemos a uma tribo neandertal durante o Paleolítico Superior e que queremos planificar a economia dos nossos bens: pedras, paus e chifres de caça. Temos a seguinte tabela de custos materiais para cada atividade:

	Talhar pedras	Cortar árvores	Caçar cervos
Pedras	0,1	0,2	0,2
Paus	0	0,1	0,2
Chifres	0,01	0,1	0,5

Esta tabela nos indica que para se talhar uma unidade de pedras, se necessita de $0{,}1$ unidades de pedras, 0 unidades de paus e $0{,}01$ unidades de chifres. À primeira vista isso não parece óbvio - por exemplo, pedras para se fazer pedras? E chifres para quê? Mas pensando melhor, para esculpir as pedras, são necessárias outras pedras já talhadas para bater umas contra as outras (percutores duros), e são necessários chifres e paus como ferramentas de apoio para terminar de limar as pedras (percutores moles).

Se atribuímos os índices 1, 2 e 3 às pedras, paus, e chifres, respectivamente, precisaremos de $a_{1,1} = 0{,}1$, $a_{2,1} = 0$ e $a_{3,1} = 0{,}01$ para talhar as pedras, e $a_{1,3} = 0{,}2$, $a_{2,3} = 0{,}2$ e $a_{3,3} = 0{,}5$ para adquirir os chifres.[22]

A matriz A poderia ser compreendida como a "receita" para se produzir cada tipo de bem.[23] Isso porque cada coluna da matriz pode ser compreendida como os recursos de que necessita cada "indústria" - ou, em outras palavras, em uma economia de mercado, como sendo a *demanda* de cada setor, enquanto que cada linha pode ser compreendida como aquilo cada setor oferece aos demais, e, portanto, como sendo a sua *oferta*:

[21] Muitos autores, por exemplo Anwar Shaikh em [25] ou Pablo Ruiz Nápoles em [26] definem este conceito de uma maneira diferente, ao incluir compensações salariais para analizar certos fenômenos do comércio internacional. No nosso texto esse conceito este conceito equivaleria àquilo que eles chamam de *coeficientes de trabalho verticalmente integrados*.

[22] Os $a_{j,i}$ serão denominados mais à frente como "coeficientes técnicos".

[23] A matriz A será chamada de "matriz tecnológica".

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}01 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix} . \tag{5}$$

Tendo entendido isso, vamos pensar em uma situação mais complexa. Um dos neandertais da tribo pretende realizar um projeto comunal: quer confeccionar uma série de estátuas representando a maternidade e a Deusa Mãe, e para isso precisa de uma unidade de pedra talhada. A pegunta que se coloca é: quanto deveríamos produzir de cada recurso para que tenhamos uma produção de uma unidade *final* de pedra? A quantidade extra que se quer produzir é normalmente referida como *demanda final* e pode ser representada pelo vetor de demanda final $\mathbf{d}$, cujos componentes são a demanda final d_i para cada tipo de bem, neste caso, $\mathbf{d} = (1, 0, 0)^T$, porque gostaríamos de produzir apenas uma unidade final do bem 1 (pedra). Se quiséssemos produzir duas unidades de pedra e uma de chifres, o vetor de demanda final seria $\mathbf{d} = (2, 0, 1)^T$.

As quantidades dos bens que precisaremos produzir são uma incógnita que vamos ter de calcular. A esta incógnita chamamos de *produção total*, e a representamos pelo vetor $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})^T$ onde i é o tipo de bem do qual queremos produzir uma unidade final ($i = 1$ para o caso da pedra). Este vetor armazena as quantidades $x_j^{(i)}$ de todos os bens j necessários para satisfazer a demanda final de um bem i dentro do sistema de setores interconectados. Mas atenção! Estes valores não devem ser confundidos com os valores a_{ji}, os quais especificam apenas a quantidade de recursos necessários para produzir um bem em um setor específico.

Agora que já colocamos o problema separadamente para cada tipo de bem, quantas pedras precisaríamos produzir? Bem, basicamente, a quantidade que for necessária para "alimentar" a própria produção dos setores interconectados, *mais* uma unidade de pedra (para satisfazer a demanda final):

$$\underbrace{x_1^{(1)}}_{\text{Produção total}} = \underbrace{a_{11}x_1^{(1)}}_{\text{Setor 1}} + \underbrace{a_{12}x_2^{(1)}}_{\text{Setor 2}} + \underbrace{a_{13}x_3^{(1)}}_{\text{Setor 3}} + \underbrace{d_1}_{\text{Demanda final}} . \tag{6}$$

Antes de prosseguir, vamos analizar os termos presentes em (6). Vemos que por exemplo o termo $a_{12}x_2^{(1)}$ se refere à quantidade de unidades de pedra necessárias para se produzir uma unidade de paus, multiplicada pela quantidade de unidades de paus necessários para se produzir a desejada 1 pedra da demanda final. [24] No nosso caso específico, temos que

$$x_1^{(1)} = 0{,}1x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(1)} + 0{,}2x_3^{(1)} + 1 . \tag{7}$$

Da mesma forma, obtemos o seguinte sistema de equações lineares para os paus e chifres:

$$x_1^{(1)} = a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} + 1 , \tag{8}$$
$$x_2^{(1)} = a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + a_{23}x_3^{(1)} + 0 , \tag{9}$$
$$x_3^{(1)} = a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_{33}x_3^{(1)} + 0 . \tag{10}$$

[24] Com *final* nos referimos às unidades de bens que obtemos após repor os bens usados na produção.

No nosso caso particular temos que

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{matrix}}_{\mathbf{x}^{(1)}} & \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 0{,}1x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(1)} + 0{,}2x_3^{(1)} \\ 0x_1^{(1)} + 0{,}1x_2^{(1)} + 0{,}2x_3^{(1)} \\ 0{,}01x_1^{(1)} + 0{,}1x_2^{(1)} + 0{,}5x_3^{(1)} \end{matrix}}_{A\mathbf{x}^{(1)}} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1\,, \\ 0\,, \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{d}} \,. \end{array} \tag{11}$$

Ao resolver este sistema de equações lineares, obteríamos as quantidades necessárias de cada recurso para podermos realizar o projeto comunal. Em forma matricial, temos que

$$\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}\,. \tag{12}$$

Manipulando a equação 12 para isolar o termo $\mathbf{x}^{(1)}$ [25], chegamos a

$$\mathbf{x}^{(1)} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}\,. \tag{13}$$

Tendo em conta o método descrito na seção 4.2 para o cálculo da matriz inversa de matrizes inversíveis, temos que

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}12 & 0{,}31 & 0{,}57 \\ 0{,}01 & 1{,}16 & 0{,}47 \\ 0{,}02 & 0{,}24 & 2{,}10 \end{bmatrix},$$ [26]

[25] Podemos fazer isso seguindo os passos abaixo:

$$\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}\,.$$

$$\mathbf{x}^{(1)} - A\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{d}\,.$$

Aplicando a propridade distributiva da multiplicação de matrizes (que indica que $AB + AC = A(B + C)$):

$$\mathbf{x}^{(1)}(I - A) = \mathbf{d}\,.$$

Multiplicando ambos os lados pela esquerda por $(I - A)^{-1}$:

$$(I - A)^{-1}\mathbf{x}^{(1)}(I - A) = (I - A)^{-1}\mathbf{d}\,.$$

E cancelando na mesma multiplicação do lado esquerdo os termos $(I-A)^{-1}$ e $(I-A)$ (pois o produto de ambos é I), chegamos a

$$\mathbf{x}^{(1)} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}\,.$$

[26] O leitor mais cético pode comprovar que de fato $(I - A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I - A) = I$.

e assim, finalmente, obtemos que

$$\mathbf{x}^{(1)} = (I - A)^{-1}\mathbf{d} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}01 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}01 & -0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}12 & 0{,}31 & 0{,}57 \\ 0{,}01 & 1{,}16 & 0{,}47 \\ 0{,}02 & 0{,}24 & 2{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}12 \\ 0{,}01 \\ 0{,}02 \end{bmatrix},$$

onde a matriz $(I - A)^{-1}$ é chamada de “matriz inversa de Leontief”.

Problema resolvido! Devemos ter uma produção total de 1,12 unidades de pedra, 0,01 unidades de paus e 0,02 unidades de chifres para produzir uma unidade final de pedra. Este resultado reflete a necessidade de se produzir uma pequena quantidade de paus e chifres para a nossa obra comunal. Por quê? A tabela não dizia que não eram necessários paus para esculpir a pedra? Isso se deve ao fato de que precisamos de chifres para esculpir a pedra e que para obter chifres, precisamos do uso de paus.

Suponhamos que para esculpir uma unidade de pedra se exige, em média, uma hora de trabalho; que para cortar uma unidade de paus se requer, em média, duas horas de trabalho; e que caçar uma unidade de chifres requer, em média, três horas de trabalho. Então, o resultado é que o custo de mão-de-obra integrada (CMOI) do tipo de bem 1 (pedra) seria (aproximadamente) $1,12 \cdot 1 + 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 1,2$ horas de trabalho. Portanto, direta ou indiretamente, levaria (aproximadamente) $1,2$ de horas de trabalho para se produzir uma unidade de pedra.

2.4. Tratamento geral para economias industriais

Como mencionado acima, o que acompanhamos foi um exemplo de uma economia simplificada, mas na realidade o raciocínio não muda tanto assim quando ampliamos a escala. O mesmo método pode ser utilizado para resolver os problemas logísticos de uma economia de milhões de bens diferentes. Para ilustrar como isto seria realizado, no entanto, só poderemos descrever os passos por meio de notação matemática abstrata (com variáveis), então o leitor terá de processar algumas equações nesta seção. Além disso, ao contrário de Leontief, dividimos o desenvolvimento em bens de produção e bens de consumo a fim de uma maior generalidade e também para podermos desvincular certas operações em diferentes sistemas de equações. Isso foi inspirado pelos métodos empregados por M. Morishima em [27].

2.4.1. Custos de mão-de-obra integrados dos bens de produção

Já sabemos que para produzir um bem do tipo 1, são necessárias $a_{1,1}, \ldots, a_{n,1}$ unidades dos bens de produção $i = 1, \ldots, n$ respectivamente. Estas unidades requeridas também necessitam de insumos para que possam ser montadas, e estes novos insumos precisarão de outros - e assim, sucessivamente, “seguimos a trilha” até que não haja mais insumos indiretos a serem levados em consideração.

Dada esta interconexão entre os diferentes setores industriais, pode-se intuir que um aumento de uma unidade do produto final do bem do tipo 1 gera um efeito “multiplicador” ou “cascata” sobre a quantidade de bens de produção de todos os tipos, inclusive sobre o próprio tipo inicial (por exemplo, para se produzir electricidade é necessária uma quantidade mínima de electricidade). Para obter as quantidades totais de bens de produção $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ que são necessárias para se obter uma unidade final do bem do tipo 1, após ter levado em conta todas as repercuções, devemos resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(1)} + 1 \\ x_2^{(1)} = a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(1)} + 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_n^{(1)} = a_{n,1}x_1^{(1)} + a_{n,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(1)} + 0 \end{cases} \tag{14}$$

Após a resolução desse sistema, o CMOI do bem de tipo 1 será dado por

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(1)} .$$

A notação $\sum_{j=1}^{n} f(j)$ representa $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ sendo f uma função qualquer. Ou seja, $\sum_{j=1}^{n} f(j)$ significa somar todos os valores da função f para todos os números consecutivos desde o limite inferior ($j = 1$) até o limite superior ($j = n$). Por exemplo, consideremos $f(j) = j$, $\sum_{j=1}^{3} f(j) = \sum_{j=1}^{3} j = 1 + 2 + 3 = 6$, ou seja, a soma dos números consecutivos desde 1 até 3. O símbolo $\sum$ é chamado de *somatório*.

Levando em consideração o fato de que produzir cada um dos insumos exige um certo período de tempo, os $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^{(1)}$ com $i = 1, \ldots, n$ precisam estar disponíveis antes do início de tal período e os $x_i^{(1)}$ com $i = 1, \ldots n$ estarão disponíveis ao final desse período. Na produção real de artigos, as indústrias utilizam os bens de produção necessários, enquanto que ao final do período eles são substituídos. As partes do produto final que permanecem após a reposição são chamadas de produtos finais. Até aqui, temos somente uma unidade do bem de tipo 1 como produto final. Da mesma maneira, procedemos com o bem de tipo 2 para obter as quantidades totais de bens de produção $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$ que são necessárias para se obtener uma unidade final do bem de tipo 2. Após termos levado em conta todas as repercussões, devemos resolver o seguente sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(2)} + 0 \\ x_2^{(2)} = a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(2)} + 1 \\ \vdots \\ x_n^{(2)} = a_{n,1}x_1^{(2)} + a_{n,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(2)} + 0 \end{cases} \tag{15}$$

Depois que este sistema estiver resolvido, o CMOI do bem de tipo 2 será dado por

$$\lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(2)} .$$

Repetindo o processo de maneira semelhante com o resto dos tipos de bens de produção, ou seja, com os bens de tipo i sendo $i = 3, \ldots, n$ obteremos n sistemas de equações lineares, que podemos escrever de forma matricial como

$$X_I = A_I X_I + I \ , \tag{16}$$

com

$$X_I = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \ldots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{bmatrix} ,$$

$$A_I = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} .$$

Assim como fizemos em 12, manipulando 16 para isolar X_I, chegaremos a

$$X_I = (I - A_I)^{-1}$$

Uma vez que estejam determinados os produtos (finais) $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ ($i-$ésima coluna de X_I) necessários para se produzir uma unidade (do produto final) do $i-$ésimo tipo de bem de produção, podemos calcular o CMOI do $i-$ésimo bem desta maneira:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)} \ . \tag{17}$$[27]

A matriz A_I é chamada de *matriz tecnológica*, cujas entradas se denominam normalmente como *coeficientes técnicos* e representam quantas unidades são necessárias em média de cada insumo para se produzir uma unidade de cada bem. Vejamos as colunas de A_I, que representam os requisitos (insumos) de cada tipo de bem.

Se escrevemos $L_I = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$, $M_I = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ temos que

$$M_I = L_I X_I \ . \tag{18}$$

Até aqui já calculamos os CMOI de todos os bens de produção, agora vamos ao cálculo dos CMOI dos bens de consumo.

[27] Em [28] é apresentada a prova de que este procedimiento é equivalente ao mais intuitivo de resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{1,1}\lambda_1 + a_{2,1}\lambda_2 + \ldots + a_{n,1}\lambda_n \\ \lambda_2 = a_{1,2}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \ldots + a_{n,2}\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n = a_{1,n}\lambda_1 + a_{2,n}\lambda_2 + \ldots + a_{n,n}\lambda_n . \end{cases}$$

2.4.2. Custos de mão de obra integrados dos bens de consumo

A produção dos bens de consumo pode ser dividida em duas etapas: na primeira fase são fabricados os bens de produção necessários e, na segunda fase, estes bens são combinados para se obter os bens de consumo final. A quantidade de bens de produção necessários para se produzir uma unidade de bem de consumo do tipo i (com $i = n+1, \ldots, m$) são $a_{1,i}, \ldots, a_{1,n}$, com o propósito de substituir estes bens de produção consumidos no processo de fabricação, precisamos de $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ unidades de bens de produção do tipo $j = 1, \ldots, n$ respectivamente, que são determinadas pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1^{(i)} = a_{1,1}x_1^{(i)} + a_{1,2}x_2^{(i)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(i)} + a_{1,i} \\ x_2^{(i)} = a_{2,1}x_1^{(i)} + a_{2,2}x_2^{(i)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(i)} + a_{2,i} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} = a_{n,1}x_1^{(i)} + a_{n,2}x_2^{(i)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(i)} + a_{n,i} \end{cases} \tag{19}$$

Na primeira etapa a sociedade consome $\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)}$ horas de trabalho, enquanto que na segunda fase a sociedade consome ℓ_i horas de trabalho. Portanto, o CMOI do bem de consumo do tipo i é $\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)} + \ell_i$.[28] Até aqui, já realizamos o procedimento para um tipo de bem $i = n+1, \ldots, m$ arbitrário. Colocando na forma de matriz as equações que obtemos até agora, temos

$$X_{II} = A_I X_{II} + A_{II}\ , \tag{21}$$
$$M_{II} = L_I X_{II} + L_{II}\ , \tag{22}$$

sendo

$$X_{II} = \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} & x_1^{(n+2)} & x_1^{(n+3)} & \ldots & x_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(n+1)} & x_n^{(n+2)} & x_n^{(n+3)} & \ldots & x_n^{(m)} \end{bmatrix},$$

[28]Em [28] é demonstrado que este procedimento é equivalente ao método mais intuitivo de resolução do seguiente sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} = a_{1,n+1}\lambda_1 + a_{2,n+1}\lambda_2 + \ldots + a_{n,n+1}\lambda_n \\ \lambda_{n+2} = a_{1,n+2}\lambda_1 + a_{2,n+2}\lambda_2 + \ldots + a_{n,n+2}\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_m = a_{1,m}\lambda_1 + a_{2,m}\lambda_2 + \ldots + a_{n,m}\lambda_n \end{cases} \tag{20}$$

$$A_{II} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,n+1} & a_{2,n+2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,n+1} & a_{n,n+2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

$$M_{II} = [\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_m],$$

$$L_{II} = [\ell_{n+1}, \dots, \ell_m].$$

Podemos notar que X_{II} é uma matriz com n linhas e $m - n$ colunas.

Agora, se ao invés de desejarmos produzir uma unidade final do i-ésimo bem de produção, quiséssemos produzir d_i unidades finais do i-ésimo tipo de bem, con $i = 1, \dots, n$ então necessitamos de $x_1, \dots, x_n$ unidades de cada tipo de bem de produção respectivamente, que são determinadas por

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Produto total}} = \underbrace{A_I\mathbf{x}}_{\text{Consumo intermediário}} + \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Produto final}} \iff (I - A_I)\mathbf{x} = \mathbf{d}\,,$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Portanto, se existe $(I - A_I)^{-1}$ (esta matriz é denominada *Matriz Inversa de Leontief*)[29] [30] então $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1}\mathbf{d}$.

Se ao invés de querer produzir uma unidade líquida do $i-$ésimo bem de consumo, quiséssemos produzir d_i unidades líquidas do $i-$ésimo tipo de bem, com $i = n+1, \dots, m$, então precisaríamos de $x_1, \dots, x_n$ unidades de cada tipo de bem de produção, respectivamente, determinadas por

$$\mathbf{x} = A_I\mathbf{x} + A_{II}\mathbf{d} \iff (I - A_I)\mathbf{x} = A_{II}\mathbf{d}\,,$$

[29] A investigação sobre as condições suficientes para a existência de $(I - A_I)^{-1}$ de tal maneira que o vetor $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1}\mathbf{d}$ tenha todas as entradas não negativas escapa ao escopo deste artigo. O leitor interessado em questões relacionadas co os problemas mencionados pode consultar [28, Capítulo 2] e [27].

[30] Sob certas condições técnicas (o leitor pode consultar, por exemplo, [29, p.351]) sobre A_I, que geralmente são satisfeitas em uma economia, resulta que $(I - A_I)^{-1} = I + A_I + \dots + A_I^q + A_I^{q+1} + \dots$ (neste ponto apareceria um limite, mas sua definição rigorosa escapa ao propósito do artigo; no seu lugar, o leitor pode interpretá-lo como sendo uma ”soma infinita”). De fato, se $A_I^{q+1} = 0$, então $(I - A_I)^{-1} = I + A_I + \dots + A_I^q$. Estas igualdades são realmente interessantes, além de nos fornecer maneiras alternativas de se calcular $(I - A_I)^{-1}$, elas nos permitem dar um sentido econômico preciso à Matriz Inversa de Leontief. Basta entender que $A_I\mathbf{x}$ são os insumos exigidos para se produzir x_i unidades do tipo de bem i com $i = 1, \dots, n$; e que $A_I^2\mathbf{x}$ são os insumos exigidos para se produzir os insumos exigidos para se produzir x_i unidades do tipo de bem i com $i = 1, \dots, n$; e assim, sucessivamente.

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{n+1} \\ d_{n+2} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}.$$

Portanto, se existe $(I - A_I)^{-1}$ então $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1} A_{II} \mathbf{d}$.

Agora podemos ver nitidamente qual é a estratégia básica do nosso planejamento econômico. Tendo fixado o vetor d, que representa a quantidade final de produtos de cada tipo que se deseja produzir, calculamos quantas unidades totais precisam ser fabricadas de cada tipo de bem de produção, x. Desta forma, podemos evitar os dois grandes problemas da União Soviética descritos anteriormente na Introdução, sem a necessidade de utilizar uma unidade monetária para descrever os fluxos de trabalho. [31] [32] Evidentemente, estimar d pressupõe também um certo desafio, ainda que muito menor do que poderia parecer à primeira vista, ainda mais com a tecnologia atual, que nos permite ter mecanismos em tempo real de retroalimentação de informação. Este problema é tratado de maneira extensa em [19].

[31] Apesar de que em geral calcular a inversa de matrizes grandes de forma exata é relativamente custoso (já que o númerode operações necessárias não cresce de forma linear com o número de linhas, como é demonstrado na seção **??**), é preciso ter em conta:

1. As matrizes A_I, A_{II} não são quaisquer matrizes; por um lado, seu tamanho depende do nível em que desagreguemos a economia em tipos de artigos (ou setores) e, por outro lado, à medida em que fazemos isso, as matrizes se tornam dispersas, ou seja, a proporção de entradas nulas seguirá crescendo. Matrizes dispersas são bem especiais, por serem altamente manejáveis. Além do mais, o total de tipos de bens existentes em uma economia real sempre será consideravelmente menor que a população total.
2. Não precisamos calcular nada de maneira exata. Somente precisamos de métodos iterativos que nos proporcionem soluções aproximadas, com a precisão que desejarmos. A área da Matemática que se encarrega de fazer isso se chama Análise Numérica e tem sido uma das áreas das Matemáticas Aplicadas mais frutíferas do último século, ainda mais com o desenvolvimento da computação. O leitor interessado neste tipo de ferramentas pode consultar [30], [31], [32], [33], [34].

[32] Se os artgos de consumo pessoal que se encontram nos estoques ou lojas públicas forem adquiridos em troca do equivalente aos seus CMOI em certificados de trabalho, o problema descrito no Apêndice A desaparece.

3. Otimização

Com o que foi apresentado até aqui, muitas das dúvidas sobre o funcionamento do planejamento ciber-socialista estariam respondidas, mas em uma economia complexa há mais problemas que devem ser levados em conta.

Em um determinado tecido agroindustrial concreto, são sempre concebíveis diferentes maneiras de abordar o mesmo problema, tarefa ou objetivo de produção, cada uma delas com resultados parcialmente ou totalmente diferentes. Já falamos sobre opções alternativas na escolha das tecnologias, nas distribuições modelos, mão de obra, nas vias de transporte e/ou de entrega, etc. Vejamos um exemplo simples: trabalhar a terra. A priori, é intuitivo que arar o campo com um trator é mais eficiente do que utilizar ferramentas manuais. No entanto, se pensarmos com mais calma, esta dicotomia não é realista. Os tratores não caem do céu. Eles também têm de ser produzidos, e podemos pensar em cenários nos quais não seria razoável iniciar a montagem de tratores. Este é o exemplo mais simples que podemos pensar, mas com um pouco de imaginação, não é difícil se dar conta de que muitos dos desafios deste século envolverão situações deste gênero: como abordar a transição para uma economia pós-carbono? Investiremos milhões e milhões de horas de trabalho numa energia experimental que, ao fim de alguns anos, poderia resolver o problema energético durante séculos, ou "vamos pelo caminho seguro" e, simplemente combinaremos, tão bem quanto pudermos, a tecnologias atualmente existentes?[33]

Em qualquer caso, estes problemas podem ser resumidos como a tentativa de maximizar ou minimizar certas quantidades sob certas restrições. Entre outras coisas, poder-se-ia tentar minimizar o número de horas de trabalho necessárias em um setor perigoso e/ou desagradável, ou a quantidade de CO_2 emitida para se produzir um determinado produto. Bem, graças às contribuições do matemático e economista Leonid Kantorovich, [34] sabemos que a maioria destes problemas pode ser modelada matematicamente no que passou a ser chamado de *problemas de otimização*. Formalizar e resolver estes problemas, com base nos recursos disponíveis, nos dá indicações nítidas sobre como melhorar ou desenvolver a nossa economia de forma eficiente.

Recordemos o que foi dito na seção 1. No ecossistema do mercado, as necessidades sociais são eclipsadas pela mediação do imperativo da lucratividade; as situações dadas são interpretadas como oportunidades de lucro, submetendo todas as inovações técnicas do conhecimento coletivo a esse fim. Esta dinâmica é tremendamente arbitrária e dá origem a problemas sem fim (sobreprodução de produtos desnecessários mas rentáveis, escassez de outros produtos necessários mas não-rentáveis, crises, etc.) mas ... não há outra maneira de se fazer as coisas? Não é intuitivo que os mecanismos de otimização hoje utilizados em escala intra-empresarial

[33] Isto não deve ser confundido com o problema, mencionado no capítulo anterior, do cálculo do custo integrado da mão de obra de um bem que esteja sendo produzido *simultaneamente* de diferentes maneiras. A questão agora é selecionar, entre uma diversidade de iniciativas *possíveis*, *a melhor*.

[34] Kantoróvich também foi premiado por este mesmo tema com o Prêmio de Ciências Econômicas do Banco da Suécia em Memória de Alfred Nobel em 1975

pela Amazon ou pela Walmart, [35] poderiam ser utilizados para fins mais emancipatórios, de maneira ainda mais eficaz onde for possível, por meio da socialização de todas as empresas e abolindo a enorme limitação que hoje faz com que elas escondam informações umas das outras?

Neste capítulo, veremos exatamente isso: como a otimização matemática poderia ser utilizada numa economia democraticamente planejada para garantir o melhor aproveitamento possível das nossas infra-estruturas. Como explicado em outros locais [36] [37], isto não implica que todas as nossas empresas públicas tenham de utilizar as mesmas técnicas de produção. Há um enorme espaço para a inovação e a experimentação, mas este é um tema que ultrapassa o âmbito deste artigo. Vamos nos concentrar agora na ideia de otimização.

3.1. Otimização Matemática

O primeiro passo para modelar um problema de otimização seria definir a *função objetivo* que deve ser maximizada ou minimizada. Escrevendo em forma matemática, precisamos encontrar uma função $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais (qulquer número) e $\mathcal{A}$ normalmente é um subconjunto do espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Esta última parte pode soar como algo complexo, mas pode ser comprendida facilmente com um exemplo. Todos estamos acostumados às 3 dimensões no nosso dia a dia (altura, largura e profundidade). Ou mesmo com 4 dimensões, se já tivermos ouvido falar de Albert Einstein... Bem, estas 3 dimensões representariam o espaço Euclidiano $3-$dimensional $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, $\mathcal{A}$ é um subconjunto de tal espaço, ou seja, todos os elementos de $\mathcal{A}$ pertenecem a $\mathbb{R}^3$, graficamente seria uma porção dele. Por exemplo, uma esfera seria um subconjunto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Por fim, resta apenas estender a matemática utilizada com $\mathbb{R}^3$ para n dimensões. Os pontos de $\mathbb{R}^3$ são definidos por 3 coordenadas, ou seja, não são nada mais que tripletes ordenados (3-tuplas) de números reais. Analogamente, os pontos em $\mathbb{R}^n$ não são nada mais que $n-$tuplas de números reais, ou seja, cada ponto em $\mathbb{R}^n$ é definido por n números ordenados. Ao leitor isso deverá ter soado familiar, já que os elementos de $\mathbb{R}^n$ são exatamente os vetores-linha ou vetores-colunas com n colunas o n linhas respectivamente, introduzidos na Seção 2.

Este último passo é simples, apesar de difícil de se imaginar, já que ninguém jamais conseguiu observar um objeto em mais de 3 dimensões. Entretanto, na Matemática isso é perfeitamente possível. Em economia, as n dimensões tem um significado mais tangível, por exemplo, ao representar as unidades de cada tipo de artigo que serão empregadas em uma certa tarefa.

O subconjunto $\mathcal{A}$ será definido pelas *restrições* do problema. Formalmente, os pontos de $\mathcal{A}$ serão $n-$tuplas de números que determinarão certas desigualdades e/ou igualdades. Por exemplo, estas restrições podem vir de limitações sobre o total de jornadas laborais empregadas ou sobre o total de toneladas de CO_2 geradas.

[35] Pode-se ler sobre a utilização destas técnicas em tais corporações em [35, Capítulo 4].

Chegando neste ponto, já conhecemos todos os ingredientes necessários para descrever um problema de otimização, ou seja, a função objetivo e as restrições. A otimização é um ramo bastante amplo da Matemática, o qual implica uma miríade de técnicas diferentes dependendo das características específicas do problema a se resolver. Neste artigo focamos na *programação linear*. A Seção 3.2 apresenta em detalhes a descrição e aplicação da programação linear a problemas econômicos. Contudo, certos aspectos da economia, como poderiam ser as economias de escala, não podem ser tratados pela programação linear, já que ou a função objetivo não é linear, ou então as relações que definem as restrições não são lineares. Este aspecto é tratado com maiores detalhes na Seção 3.3.

3.2. Programação Linear

As relações lineares entre variáveis são relações de proporcionalidade. Consequentemente, uma função linear f definida em $\mathbb{R}^n$ mapeia combinações lineares dos vetores x, y em combinações lineares de $f(x), f(y)$, com as mesmas constantes de proporcionalidade, formalmente, diremos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$. O aspecto que estas funções possuem é, por exemplo, o da reta no plano ou o plano em $\mathbb{R}^3$. Este tipo de funções são bem manipuláveis mediante computadores e apresentam propriedades interessantes.

Os problemas de programação linear geralmente são representados na literatura com a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{23}$$

onde $\mathbf{c}^T$ é um vetor-linha $1 \times n$, $\mathbf{x}$ é um vetor coluna $n \times 1$, $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{0}$ é um vetor coluna $n \times 1$ cujos elementos são unicamente 0's. O problema anterior trata de maximizar a função (linear) $\mathbf{x} \to \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ sujeita a certas restrições que a seguir explicaremos.[36]

As duas restrições aparentes, sendo expressas em notação matricial, correspondem, na verdade, a múltiplas restrições individuais. Por esta razão, consideramos conveniente utilizar a notação matricial neste tipo de problema.

Como vimos na Seção 2, quando foi introduzido o conceito de produto matriz-vetor, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ representaria m desigualdades, já que a matriz A tem $m \times n$ dimensões, onde n é o número

[36] Como afirmamos em 6, toda aplicação linear pode ser representada por uma função da forma $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$, sendo A uma certa matriz. Portanto, no problema anterior a função objetivo pode ser qualquer função linear.

de variáveis no nosso problema. As m restrições podem fazer referência, por exemplo, a diferentes insumos em um processo de fabricação, horas trabalhadas, maquinário utilizado... O relevante aqui é manter em mente que as restrições sempre terão um significado no mundo real. A segunda restrição é bem habitual e se encarrega de garantir que as variáveis em $\mathbf{x}$ não adotem valores negativos para evitar soluções que não tenham sentido no mundo real, como poderia ser a recomendação de se produzir um número negativo de veículos.

Iniciemos agora a resolução de um problema concreto com as ferramentas que temos até o momento. Parece que, no último plebiscito sobre a descarbonização da economia, os cidadãos optaram por dar maior importância à bicicleta como meio de transporte. Ao contrário de uma economia capitalista, não é necessário esperar por ajustes de oferta e demanda ou que algum capitalista detecte uma oportunidade de mercado, o resultado do plebiscito pode ser implementado diretamente por todo o setor de bicicletas e ciclismo.

Dada uma fábrica de bicicletas que produz modelos para montanha (”mountain bikes”) (x_1) e bicicletas elétricas (x_2), o objetivo é que a fabrica maximize sua produção tendo em conta que se espera que as aquisições de bicicletas elétricas serão o dobro das de montanha, já que as primeiras são muito mais cômodas para o deslocamento por longas distâncias até o trabalho. Este tipo de preferências podem refletir-se na função objetivo utilizando o vetor $\mathbf{c}^T = [1 \quad 2]$, resultando na função objetivo $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = x_1 + 2x_2$. Em outras palavras, as bicicletas elétricas têm um peso maior na função e, portanto, serão priorizadas na produção.

Os insumos semanais da fábrica são 60 kgs de aço e 180 kgs de alumínio. A produção de cada bicicleta de montanha exige 1 kg de aço e 4 kgs de alumínio, enquanto que as bicicletas elétricas precisam de 2 kgs de aço e 2 kgs de alumínio. Isso resulta nas restrições para o aço (equação (24)) e para o alumínio (equação (25)), uma vez que a produção nunca poderia ultrapassar as matérias-primas necessárias em sua fabricação. Por último, teremos que considerar as horas de trabalho necessárias para cada bicicleta. A fábrica conta com 4 empregados trabalhando 35 h semanais cada um e cada um deles leva 3 horas para terminar uma bicicleta de montanha e 4 horas para uma bicicleta elétrica (equação (26)).

$$1x_1 + 2x_2 \leq 60 \tag{24}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 180 \tag{25}$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 140 \tag{26}$$

A equação (27) demonstra as restrições em formato matricial. Observe-se que as últimas duas linhas da matriz A e do vetor $\mathbf{b}$ garantem que o número de bicicletas não seja negativo.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 180 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

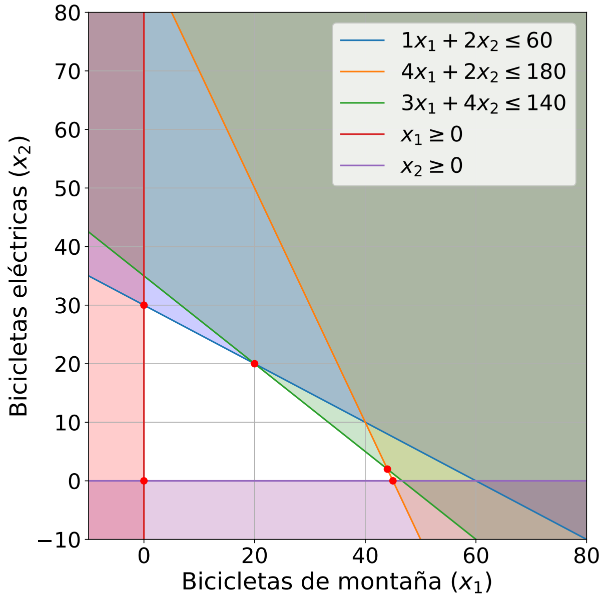

Figura 3: A região viável do problema de otimização representa um poliedro. Os planos de diferentes cores correspondem às restrições do aço (azul), alumínio (laranja), horas de trabalho (verde) e a não-negatividade da solução (vermelho e violeta), respectivamente.

A região viável é exibida na Figura 3, onde as zonas sombreadas representam o espaço no qual as restrições não serão cumpridas. Entre as intersecções de todas as restrições, forma-se um poliedro (região branca na figura) de tal forma que qualquer ponto dentro deste poliedro cumpre todas as restrições. É possível demostrar que o ponto que maximiza (ou que minimiza) a função objetivo deve ser um dos vértices de tal poliedro, pelo que todo algoritmo que pretenda encontrar o máximo (ou o mínimo) da função objetivo, deverá avaliá-laem todos ou em alguns desses vértices para, dessa maneira, encontrar a solução ao problema de programação linear. Um dos algoritmos mais conhecidos nesse sentido é o “algoritmo simplex”.

3.2.1. O método simplex e suas aplicações

À seguir, faremos uma exposição, de maneira intuitiva e sem entrar nos detalhes do cálculo, modus operandi do *algoritmo simplex*, o método normalmente utilizado para se resolver os problemas de programação linear.

Para entendê-o basta conhecer duas características do problema: uma relacionada com as restrições e outra com as funções objetivo.

A primeira é a forma específica da região viável na qual as soluções cumprem os requisitos impostos pelas restrições. Trata-se de um poliedro convexo (um cubo ou um dodecaedro são dois exemplos, ainda que as regiões viáveis não tenham de estar apenas em 3 dimensões e nem serem regulares).[37]

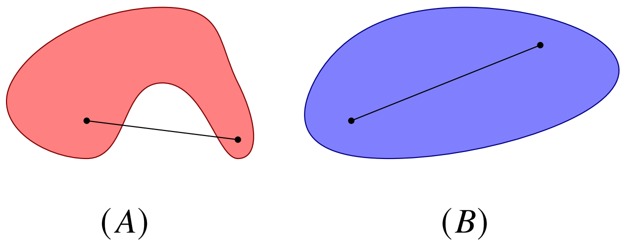

Figura 4: Exemplo visual de um conjunto não convexo (A) e outro convexo (B).

A segunda característica do problema é que a função objetivo, ao ser também uma função linear, ordena o espaço das soluções as dividindo em linhas, planos, ou hiperplanos (ou seja, a extensão do conceito para mais de 3 dimensões) nos quais a função vale igualmente (ver figura 6).

Dadas estas duas características, a ideia é fazer crescer (ou diminuir) a função objetivo. Para isso, teríamos que nos deslocar, subindo (ou descendo) em direção perpendicular a esses planos. Estes dois resultados juntos nos levam à seguinte conclusão: as soluções ótimas só podem estar em um vértice ou em vários deles (juntamente com os pontos entre eles: uma aresta ou uma face). Podemos imaginar isso em 3D apoiando um poliedro sobre uma mesa, seja sobre um ponto, seja sobre mais de um, e buscando o outro ponto de maior altura: de maneira intuitiva, vemos que de fato será um vértice (ou mais de um).

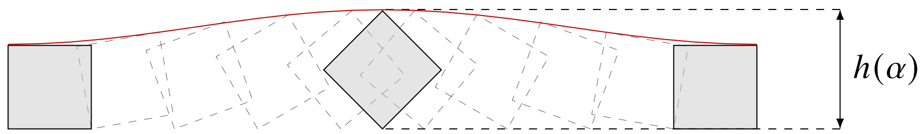

Figura 5: Exemplo visual dos possíveis máximos de um poliedro convexo simples (quadrado), onde h(α) é a altura em função do ângulo de inclinação. Os pontos mais altos ou são um vértice ou uma aresta.

Como estamos interessados em encontrar uma solução ótima viável, não nos interessa se existem várias, o que interessa é encontrar uma delas. O mais importante do resultado anterior é que o nosso ótimo vai estar em algum vértice. Com este objetivo em mente, foi concebido um algoritmo que se encarrega apenas de fazer isso: o método simplex. Este algoritmo processa-se em três fases: 1. Inicialização, 2. Laço de iteração e 3. Finalização.

[37] Devemos nos recordar, antes de prosseguir, que matematicamente, um conjunto é convexo se e somente se, para quaisquer dois pontos do conjunto que tomemos, o segmento que os une se encontra contido no conjunto.

1. O algoritmo é inicializado tomando-se um vértice qualquer. A partir daí, são analizados os seus vértices adjacentes (que estão ligados a ele por uma aresta) e calcula-se qual deles tem um valor mais elevado para a função objetivo (se estivermos a maximizando).

2. Em seguida, deslocamo-nos para este novo vértice e repetimos o processo. Como vamos sempre aumentando o valor da função objetivo, acabaremos atingindo o vértice ótimo.

3. Isto é confirmado quando verificamos que os seus vértices adjacentes têm um valor menor para a função objetivo. É aí que o simplex é finalizado, tendo alcançado a solução ótima viável.

Uma vez conhecido o método simplex, podemos aplicá-lo ao problema anterior para a otimização da fabricação de bicicletas e, dessa maneira, obter a solução do problema. Os vértices do poliedro que forma a região viável estão marcados com círculos vermelhos na Figura 3. Estes vértices são os pontos que cortam os planos que formam as restrições. Por exemplo, para se obter o ponto de corte das restrições $x_1 \geq 0$ e $1x_1 + 2x_2 \leq 60$ tão somente é necessário resolver o sistema de equações formado pelas duas restrições. Em outras palavras, seria necessário substituir $x_1 = 0$ da primera restrição na equação $1x_1 + 2x_2 = 60$ para assim obter o ponto de corte $(x_1, x_2) = (0, 30)$. Procedendo de uma maneira semelhante com o restante das restrições, se obteria a lista de vértices $[(0,0), (0,30), (20,20), (44,2), (45,0)]$.

O leitor simplesmente tem de substituir cada um destes pontos na função objetivo $x_1 + 2x_2$ para encontrar seu máximo, que neste caso seria 60. É interessante observar que este máximo poderia ser alcançado de duas maneiras diferentes (i.e., para $(x_1, x_2) = (0, 30)$ e $(x_1, x_2) = (20, 20)$). A princípio, qualquer das duas seria uma solução válida para o nosso problema e a decisão final poderia ser tomada, por exemplo, de maneira aleatória (lançando uma moneda ao ar para decidir o resultado), ou com base na coordenação em escala setorial (poderia ser que a demanda de bicicletas para montanha acabasse ficando desabastecida se fosse escolhida a opção em que $x_1 = 0$).

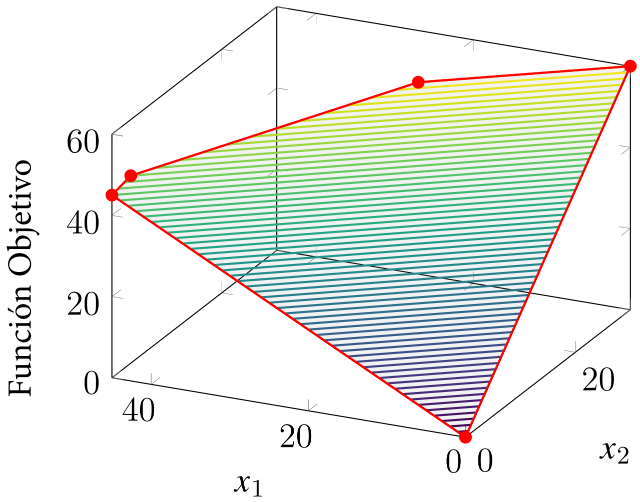

Figura 6: Valores da função objetivo na região viável, representada pela área delimitada pelas linhas vermelhas. Observe que a função tem um valor constante nas retas sombreadas no interior do polígono (valor mais baixo na color lilás, mais alto em amarelo).

Para o leitor interessado no formalismo sobre o qual se apoia este algoritmo, recomendamos consultar a bibliografia correspondente [38].

Vejamos, com uma série de exemplos, o quão versátil é a otimização linear. Para isso, veremos que uma grande variedade de problemas — no nosso caso, econômicos — são na realidade problemas de programação linear de uma ou outra forma, e por tanto, podem ser resolvidos por métodos como o simplex, descrito anteriormente.

3.2.2. Exemplo histórico do Laboratório Central de Plywood Trust

Vamos tratar de um exemplo que, de fato, se baseia em um problema real que o Laboratório Central de Plywood Trust apresentou a L. Kantorovich em torno de 1939 (descrito em [39]).

O problema consistía em maximizar a produção de diferentes tipos de madeira em determinadas proporções, fazendo uso de certas máquinas. Eles dispunham de 8 máquinas para produzir madeira de 5 tipos diferentes. A solicitação pretendia garantir que $10\,\%$, $12\,\%$, $28\,\%$, $36\,\%$ e $14\,\%$ do produto final fossem respectivamente do primeiro, do segundo, do terceiro, do quarto e do quinto tipo de madeira. Seja p_k a proporção de madeira do tipo k que é preciso produzir, no nosso caso: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,12$, $p_3 = 0,28$, $p_4 = 0,36$ e $p_5 = 0,14$. Chamemos de $\alpha_{i,k}$ o número de unidades de madeira do tipo k que são produzidos em uma jornada de trabalho usando a máquina i e chamemos de $h_{i,k}$ o tempo, expresso como fração da jornada de trabalho, que utilizaremos a máquina i para produzir madeira do tipo k. Os $\alpha_{i,k}$ são dados conhecidos pelo Laboratório Central que representam a produtividade das máquinas para fabricar os diferentes tipos de madeira. Estes dados eram concretamente os siguientes:

Número da máquina	Tipo de madeira				
	1	2	3	4	5
1	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	6,0	9,0	14,0	17,0
8	5,0	7,0	10,0	14,8	18,0

Tabla 2: Os $\alpha_{i,k}$ com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

O problema consiste em obter os $h_{i,k}$ com $i = 1, \ldots, 8$ e $k = 1, \ldots, 5$ que verificam as seguintes condições:

1. $h_{i,k} \geq 0$.[38]

2. $\sum_{k=1} h_{i,k} = 1$.[39]

3. $\frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{8} h_{i,1}\alpha_{i,1} = \frac{1}{p_2} \sum_{i=1}^{8} h_{i,2}\alpha_{i,2} = \frac{1}{p_3} \sum_{i=1}^{8} h_{i,3}\alpha_{i,3} = \frac{1}{p_4} \sum_{i=1}^{8} h_{i,4}\alpha_{i,4} = \frac{1}{p_5} \sum_{i=1}^{8} h_{i,5}\alpha_{i,5}$ e que este valor comum seja o máximo.[40]

A solução do problema anterior, aplicando o método simplex é a seguinte:

[38] Isto é evidente, mas é importante para não se obter soluções com $h_{i,k} < 0$, que carecem de sentido.

[39] Cada máquina passará a jornada de trabalho inteira produzindo algum tipo de madeira.

[40] Se chamamos de $z_k = \sum_{i=1}^{8} h_{i,k}\alpha_{i,k}$ às unidades produzidas de cada tipo de madeira $k = 1, 2, 3, 4, 5$, então as unidades totais de madeira produzidas (em uma jornada de trabalho) são $M = \sum_{k=1}^{5} z_k$. Assim, temos as condições $z_k = p_k M$ para todo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ sendo equivalentes às primeiras condições de 3. Para ver isso, basta observar que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$, pela definição de p_k, e que

$$\begin{aligned} p_k M &= p_k\left(\frac{p_1 z_1}{p_1} + \frac{p_2 z_2}{p_2} + \frac{p_3 z_3}{p_3} + \frac{p_4 z_4}{p_4} + \frac{p_5 z_5}{p_5}\right) \\ &= p_k(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)\frac{z_k}{p_k} \\ &= z_k. \end{aligned}$$

Estas últimas condições são mais claras que aquelas que aparecem em 3.

Número da máquina	Tipo de madeira				
	1	2	3	4	5
1	0	0,3321	0	0	0,6679
2	0	0,9129	0,0871	0	0
3	0.5744	0	0,4256	0	0
4	0	0	0,9380	0,0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0

Tabla 3: Los $h_{i,k}$, com $i = 1, 2, \ldots, 8$ e $k = 1, 2, \ldots, 5$, ótimos buscados.

O total ótimo de unidades de madeira de cada tipo que se pode produzir em uma jornada de trabalho é

$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,1}\alpha_{i,1} = 0,5744 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 7{,}872\,,$$

$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,2}\alpha_{i,2} = 0,3321 \cdot 7 + 0,9129 \cdot 7,8 = 9{,}44532\,,$$

$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,3}\alpha_{i,3} = 0,0871 \cdot 9,7 + 0,4256 \cdot 10 + 0,9380 \cdot 9,0 + 1 \cdot 8,5 = 22,04287\,,$$

$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,4}\alpha_{i,4} = 0,0620 \cdot 13,5 + 1 \cdot 13,5 + 1 \cdot 14,0 = 28,337 \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,5}\alpha_{i,5} = 0,6679 \cdot 16,5 = 11{,}02035\,,$$

respectivamente.

3.2.3. Variedade de outros possiveis exemplos

Suponhamos agora que temos n máquinas que formam parte do processo de produção de um certo tipo de bem, composto de m peças (em princípio podem haver repetições de tipos de peças, no entanto, em nome da simplicidade de tratamento, lidaremos com cada peça como sendo de tipo distinto e isso não representará nenhum problema). Chamemos de $\alpha_{i,k}$ o número de peças do tipo k que são produzidas em uma jornada de trabalho utilizando a máquina i. Observemos que caso a máquina i não seja capaz de produzir peças do tipo k (por exemplo, um trator não poderia produzir parafusos) então poderíamos ter $\alpha_{i,k} = 0$. O que estamos buscando? Queremos distribuir o trabalho entre as diferentes máquinas de tal maneira que maximizemos o número total de produtos completados. Chamemos de $h_{i,k}$ timpo, expresso como fração da jornada de trabalho, que vamos utilizar a máquina i para produzir peças do tipo k. Nosso problema é precisamente determinar os $h_{i,k}$ com $i = 1, \ldots n$, $k = 1, \ldots, m$ de tal maneira que maximizemos o produto final de itens finalizados. Vejamos que condições os $h_{i,k}$ precisarão garantir. É evidente que $h_{i,k} \geq 0$ para todo i, k e que para cada i

$$\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1 \ .$$ [41]

Se z_k representa o total de peças do tipo k produzidas, temos que

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k} \ ,$$

já que $\alpha_{i,k} h_{i,k}$ nos fornece o total de peças do tipo k produzidas utilizando a máquina i. Se queremos obter itens completos, será preciso impor a condição $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$, ou seja, que o total de peças de cada tipo seja igual. Devemos maximizar o valor comum, z, de todas estas quantidades. Portanto, solucionar o problema enunciado nos leva a resolver o Problema A: Determinar $h_{i,k}$ com $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ tais que

1. $h_{i,k} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$.
2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$.
3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ e z é o máximo, siendo $z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k}$ para todo k .

O leitor pode facilmente escrever o Problema A da forma usada em (23).[42] Outras variações deste problema também se encaixam com a estrutura do Problema A. Por exemplo, se apenas produzíssemos um único tipo de peça com diferentes máquinas e houvessem distintos processos necessários de produção da mesma, nos quais diferentes máquinas pudessem ser utilizadas,[43] chegaríamos ao Problema A, com a diferença de que $\alpha_{i,k}$, neste caso, seria o número de peças que tivessem passado pelo $k-$ésimo processo utilizando a máquina i durante uma jornada de trabalho.

Também podemos acrescentar ao problema original condições com limitações adicionais, por exemplo, se cada processo de manufatura exigir uma quantidade de energia diferente, poderíamos querer limitar o gasto energético total. Chamemos de $c_{i,k}$ os kWh de energia consumida por dia pela fabricação da peça do tipo k utilizando a máquina i . O gasto energético total é dado pela expressão $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} c_{i,k}$. Podemos então acrescentar ao Problema A a restrição de que o gasto energético total seja menor ou igual a C, para algum C prefixado. Assim, chegamos ao Problema B: Determinar $h_{i,k}$ com $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ tais que

1. $h_{i,k} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$.

[41] Podemos assumir que cada máquina será utilizada durante toda a jornada de trabalho, caso contrario, substituiríamos a condição por $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} \leq 1$.

[42] O problema descrito em 3.2.2 pertenece a esta família de problemas se tomamos como "$\alpha_{i,k}$" $\frac{\alpha_{i,k}}{p_k}$ sendo p_k a proporção de madeira do tipo k que é necessário produzir.

[43] Por exemplo, fabricar armários necessita primeramente derruar árvores, cortar a madeira nas dimensões adequadas, ...etc e todos estes processos poderiam ser realizados com diferentes maquinários.

2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ e z é o máximo, sendo $z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k}$ para todo k .

4. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} c_{i,k} \leq C$.

Observamos que $c_{i,k}$ pode ser substituído pelo gasto de água ou de pessoas utilizadas na produção do tipo de peças k usando a máquina i e assim podemos impor restrições sobre a quantidade total de água que se pode gastar ou sobre o total de pessoas a serem utilizadas.

Agora, vamos supor que uma mesma máquina é capaz de produzir, de uma só vez, diferentes peças (ou de realizar varios processos ao mesmo tempo), e que podemos organizar o processo produtivo utilizando diferentes métodos de produção. Seja $\lambda_{i,k,l}$ o número de peças do tipo k que são produzidas sob o l-ésimo método de produção utilizando a máquina i. Se $h_{i,l}$ é o tempo, expresso como fração da jornada de trabalho, que é empregado na utilização da máquina i com o l-ésimo método de produção, então a quantidade total de peças do tipo k produzidas utilizando todas as máquinas, z_k, será expresso por $z_k = \sum_{i,l} \lambda_{i,k,l} h_{i,l}$. o mesmo raciocínio que antes nos conduziu ao Problema C: Determinar os $h_{i,l}$ tais que

1. $h_{i,l} \geq 0$ para todo i, l .

2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,l} = 1$ para cada i .

3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ e z é o máximo, sendo $z_k = \sum_{i,l} \lambda_{i,k,l} h_{i,l}$ para todo k .

É possível inclusive estender o problema ainda mais e expressar muitos outros problemas da mesma forma, entretanto, cremos que com estes exemplos terão bastado para que o leitor entenda a idea por trás da sua aplicação e o quão versátil é a programação linear ao ser aplicada a problemas econômicos, em qualquer escala. O leitor interessado em se aprofundar nestes temas pode consultar [39] e [40]. Com respeito à escala, a solução aos problemas que temos apresentado, que tratam basicamente sobre a otimização do uso de maquinário, fazem uma diferença mais intensa ao serem aplicados a setores maiores da economia.

3.3. Não-linearidades

Até agora temos considerado que as variações na economia são produzidas de maneira linear. Isto significa que assumimos que para se produzir uma quantidade n vezes maior (ou menor) de um dado produto x, necessitaremos de uma quantidade n vezes maior (ou menor) de insumos. Esta é a melhor aproximação inicial ao funcionamento macroscópico real das economias. Contudo, em um nível mais detalhado de análise se comprova que há certos setores que se comportam de maneira notavelmente diferente: estamos falando de não-linearidades (ver figura 7).

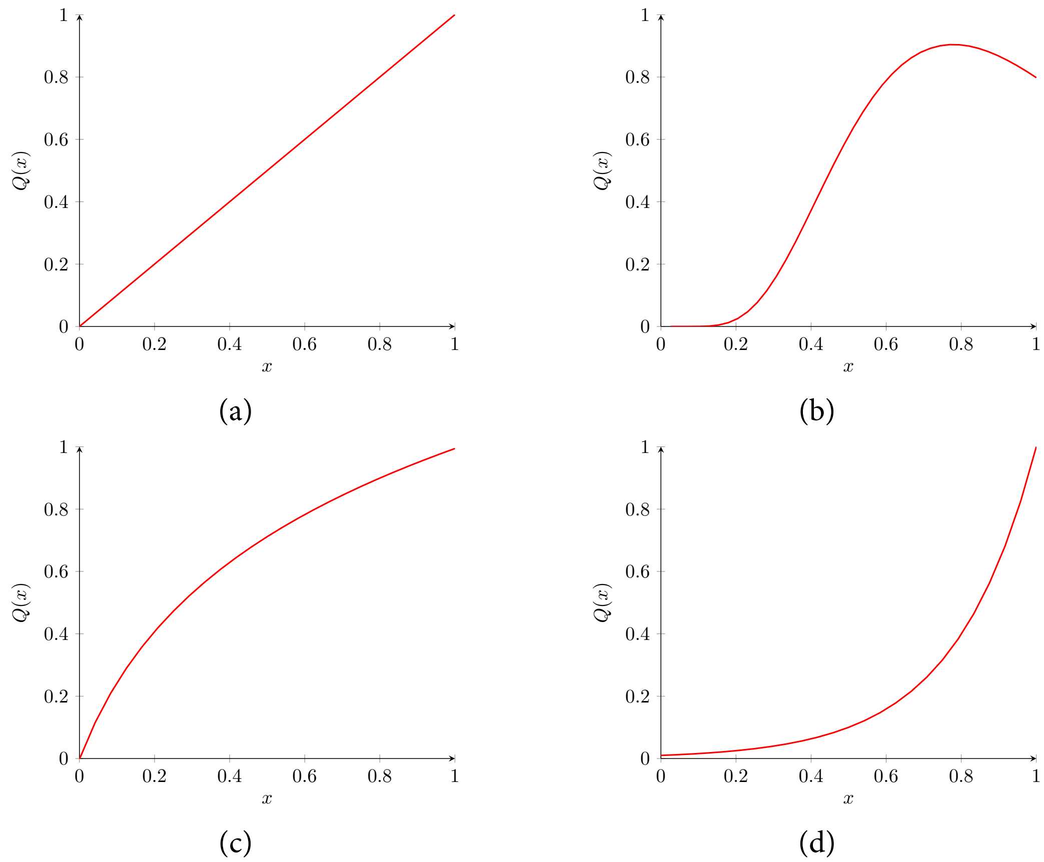

Figura 7: exemplos de funções lineares (a), e não lineares (b,c,d). Se as entendemos como funções de produção, o eixo horizontal é a quantidade de insumos e o vertical, a de produtos fabricados.

Há diversos tipos de fenômenos que impedem um comportamento linear: custos fixos, produtividade marginal crescente, decrescente, etc… Além disso, incluiríamos entre as não-linearidades as situações econômicas nas quais se exigem resultados inteiros.[44] Às incluímos porque estamos manejando uma noção de linearidade em sentido estrito: em casos lineares podemos reduzir ou aumentar o conjunto de insumos/produtos por uma relação arbitrária, sem termos que nos limitar a resultados inteiros.

3.3.1. Desafios

Para facilitar a compreensão intuitiva destes desafios, apresentaremos vários exemplos concretos destes fenômenos em economias reais:

- Custos fixos: para visualizá-los, imaginemos um modelo linear para o caso da extração de gás, de tal forma que encontrássemos uma relação de 2 horas para extrair 1L de gás

[44]Nos referimos às variáveis inteiras, que desenvolveremos na próxima seção, na qual ficarão mais nítidas tanto estas noções quanto a distinção no que diz respeito a "relações arbitrarias".

(em média). Considerando estes dados, poderíamos concluir que para se extrair um total de um litro de gás necessitaríamos somente duas horas de trabalho humano. Todavia, acrescentando um pouco mais de realismo ao problema, nos damos conta de que isso é um absurdo. Para se extrair o primeiro litro de gás, antes disso deveríamos construir enormes instalações de extração e transporte, que exigem milhares de horas de trabalho. Estes investimentos que necessitamos como base para realizar certos processos produtivos e que não variam com a quantidade produzida são aquilo que chamamos de "custos fixos" e são essenciais em diversos setores.

- Produtividades marginais: como exemplos de uma produtividade marginal crescente e decrescente temos as economias e deseconomias de escala. As economias de escala são produzidas quando, ao aumentarmos a quantidade produzida, os custes médios por unidade produzida são reduzidos (um exemplo são os conglomerados capitalistas que utilizam esta vantagem no mercado). Com as deseconomias, por sua vez, ocorre justamente o contrário. Em setores como a mineração ou a agricultura, primeiro são cultivadas as zonas mais férteis e com maior produto por hora trabalhada mas, à medida em que estas vão se acabando, começa-se a se fazer uso de terras menos produtivas, dando lugar a uma produtividade marginal decrescente. Nestos casos, se quiséssemos duplicar a produção, teríamos que investir mais do que o dobro de trabalho.
- Variáveis inteiras: uma variável inteira $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ se distingue das variáveis reais $(0{,}1, -34{,}3, 1, \pi, \ldots)$ que manipulamos na programação linear, no sentido de que elas têm parte decimal. Exemplos econômicos de variáveis inteiras são as fábricas ou muitos dos bens de consumo que são produzidos. Para efeitos da planificação, devemos levar em conta variáveis inteiras para que o plano não preveja a construção de um terço de fábrica em um determinado local, ou a alocação de meio veículo para tal loja, por exemplo.

A seguir, veremos as diferentes estratégias que são utilizadas para abordar estas dificuldades na hora de calcular um plano viável e aproximadamente otimizado.

3.3.2. Soluções

Antes de entrar nos tipos de soluções é preciso fazer um apontamento acerca da utilização dessas soluções. Quando é preciso resolver problemas para além da mera planificação linear, a complexidade computacional logicamente aumenta, restringindo aiunda mais (ou menos) a nossa margeM de manobra [41]. Não obstante, isso não nos impede de aplicar estes métodos em escalas inferiores à diretamente nacional: as soluçõoes exatas para os problemas apresentados podem ser encontradas, na prática, em outras escalas como no nível setorial, regional ou local.[45] Existe uma rica literatura de métodos mais complexos mas bem mais úteis que

[45] Além do enfoque algorítmico que estamos expondo neste trabalho, é conveniente destacar o tratamento da complexidade que tem sido realizado a partir da Cibernética. Na URSS do pós-guerra a modelização de sistemas dinâmicos com retroalimentação continuou ganhando muita relevância, precisamente no contexto da planificação em escala regional e local. Como face visível desta iniciativa, cabe mencionar o pouco conhecido grupo de pesquisadores soviéticos de Ciberneticá do Instituto de Economia de Novosibirisk, Sibéria [42].

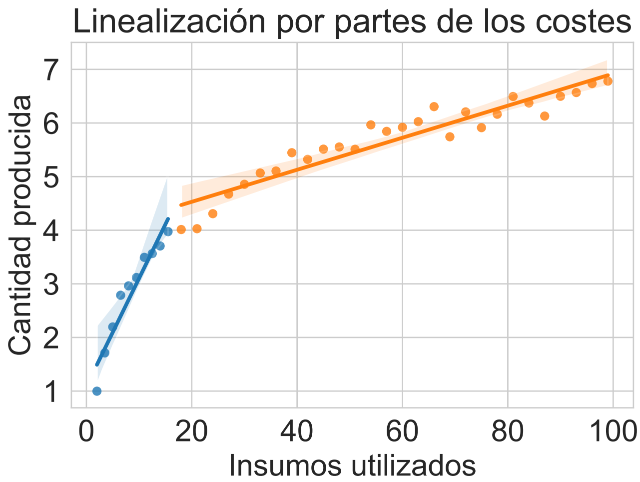

Figura 8: exemplo de custos marginais decrescentes. Aproximamos a núvem de pontos por duas retas, conforme a produção seja em maior ou menor quantidade. A zona sombreada nos indica o intervalo de confiança do nível de aproximação utilizado.

poderíam ser aplicados nestes casos, rebaixando a complexidade computacional por meio de aproximações e garantindo resoluções viáveis na prática. O aprofundamento nas características desses métodos é algo que excede os limites de um artigo introdutório, mas faremos uma descrição superficial de alguns exemplos para que o leitor comecee a se familiarizar com os mesmos.

Linearização por partes

Para enfrentarnos a funções não lineares (como as produtividades crescentes o decrescentes, por exemplo) podemos ”linearizá-las”. ”Linearizar”, na Matemática, significa escolher uma função linear que se pareça bastante com a função original, seja localmente (como no caso da linearização por partes) ou seja globalmente.

Um exemplo intuitivo seria o modelo que se usa para o Planeta Terra, dependendo do nosso objetivo. Todos sabemos que a Terra é esférica (tecnicamente, esferoide) e se nos dedicássemos a calcular as órbitas de satélites, estaríamos obrigados a levar em conta esta esfericidade. No entanto, quando precisamos projetar um edifício ou uma rede de trens, assumimos que a Terra é plana, deixando de levar em conta sua esfericidade, porque isso facilita os cálculos e nesta escala é irrelevante se ela é uma esfera ou se é plana.

Para encontrarmos um plano aproximadamente ótimo podemos utilizar exatamente o mesmo instrumento, considerando que em cada região local das funções não lineares há uma função linear que as aproxima bem o suficiente (o que chamamos de linearização por partes). Esta ferramenta é utilizada em muitos setores; por exemplo, poderíamos linearizar os custos de produção quando temos alguns custos marginais decrescentes, que também foram estimados com um certo nível de erro (quando temos uma núvem de pontos, ver figura 8).

Otimização não convexa

A otimização não convexa se dá precisamente quando temos comportamentos de produtividad marginal crescente (entre outros) como os da economia de escala. Estes casos geram regiões viáveis não convexas, onde não podemos aplicar os métodos de programação linear que vínhamos utilizando.[46] Não obstante, uma ferramenta que pode ser utilizada para se resolver este problema é a inscrição de um poliedro convexo P_1 no interior da região não convexa P de tal maneira que possamos aplicar as ferramientas de programação convexa sobre ela. Ao obtermos um máximo aproximado x_1 dentro dessa região, podemos usá-lo para construir uma nova região convexa P_2 que esteja mais próximo de um ótimo da região não convexa x_l (ao menos localmente) e repetir novamente o mesmo processo (ver a figura 9). Dessa maneira, por recorrência acabaríamos nos aproximando (com uma pequena margem de erro) de um valor ótimo [21] (pelo menos um ótimo local).

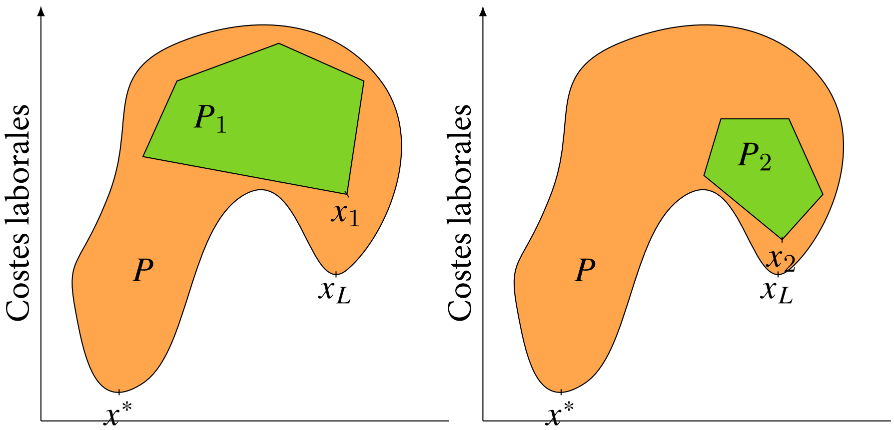

Figura 9: Gráficos representando os dois primeiros passos iterativos do método.

De fato, é dessa maneira que funciona, de maneira inconsciente, o mercado capitalista atual: se aproximando de ótimos por recorrência. A boa noticia é que em uma economia planificada, tendo informações do conjunto, não temos por que nos conformarmos com um ótimo local da região não convexa - pelo contrário, há diversas ferramentas de análise que permitem que se encontre o ótimo de toda a região $x*$. Tendo esta visão de conjunto, poderíamos poupar custes e aumentar a eficiência dos processos nos pontos onde o mercado é incapaz de fazer isso, devido ao seu funcionamento.

Programação inteira mista

Por sua vez, o problema das variáveis inteiras tem uma solução conhecida pelo nome de programação intera mista (MIP, por sua sigla em inglês). Trata-se de uma variação da programação linear na qual se acrescenta a restrição de que certas variáveis sejam inteiras. A restrição

[46] O mecanismo matemático concreto pelo qual este tipo de comportamento, em certos benes, dão lugar a regiões viáveis não convexas envolve as segundas derivadas de suas funções de produção. Contudo, tanto este mecanismo como sua tradução nos comportamientos econômicos reais se encontram fora dos objetivos explicativos deste trabalho.

dificulta consideravelmente o problema, ao ponto de se precisar de outros algoritmos tais como o “branch and cut” (ramificar e cortar”). O leitor interessado neste tipo de problemas pode consultar [43]. Representamos um problema de MIP na figura 10.

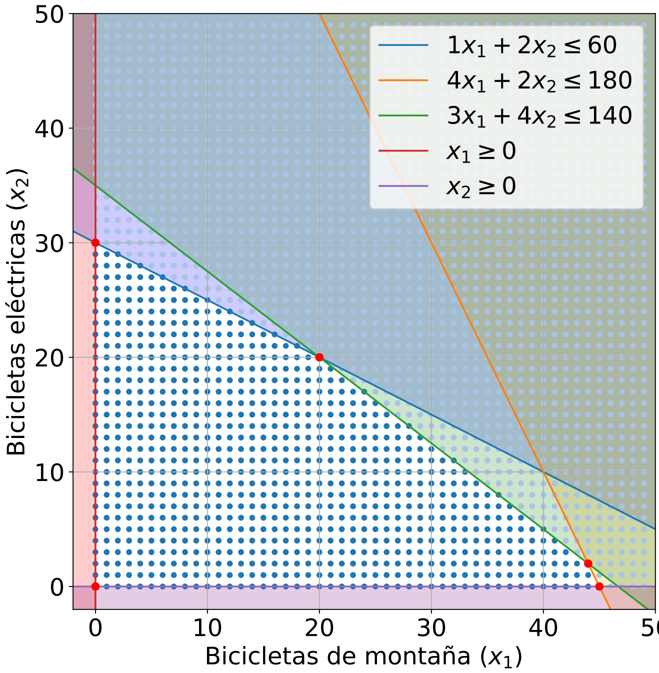

Figura 10: A zona em branco representa a região viável do problema de programação linear que apareceu na Seção 3.2, enquanto que os pontos em azul representam a região viável de sua correspondente versão inteira, ou seja, o problema das bicicletas com a imposição da condição de que as variáveis sejam números inteiros (problema de programação linear inteira).

Inteligência Artificial (IA)

Outra proposta para lidar com não-linearidades é transformar a matriz tecnológica a de tal maneira que cada coeficiente, ao invés de ser um simple escalar a_{ij}, seria uma função capaz de modelar economias de escala $f_{ij}(x_j)$ [44]. Desta forma, a matriz tecnológica $F(\mathbf{x})$ variaria em função do número de unidades de cada produto j a serem produzidas.

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad \longrightarrow \quad (I - F(\mathbf{x}))\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1) & f_{12}(x_1) & \cdots & f_{1n}(x_1) \\ f_{21}(x_2) & f_{22}(x_2) & \cdots & f_{2n}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x_n) & f_{n2}(x_n) & \cdots & f_{nn}(x_n) \end{bmatrix}$$

Para que esta proposta seja viável para a planificação em grande escala, cada unidade produtiva deve ser capaz de modelar de maneira precisa a quantidade de insumos necessários para se produzir cada bem em função das quantidades a se produzir, pelo que sería preciso gerar um número enorme de modelos matemáticos. Graças aos avanços recentes na Ciência de Dados e na Inteligência Artificial, este processo poderia ser realizado, até certo ponto, de maneira automática, já que estas funções f_{ij} poderíam ser diretamente .ªprendidas.ᵉᵐ função dos dados reais de produção de cada uma das unidades de trabalho, tal como proposto por Spyridon Samothrakis em [45].

4. Complexidade computacional

Nas seções anteriores vimos como a otimização linear é útil para que possamos organizar a economia de maneira racional e eficiente, sem utilizar o dinheiro. L. von Mises sustentava [46, 47] que isso era impossível devido à complexidade dos cálculos envolvidos.[47] os propósitos desta seção serão, por um lado, definir com precisão o quê se entende por çomplexidade dos cálculos envolvidos- o que chamaremos depois de *complexidade computacional*, associada com certo algoritmo – e, por outro lado, demonstrar a complexidade computacional de certos algoritmos.

Quando Mises formulou sua famosa crítica à planificação econômica, a palavra *computador* estava associada a um emprego, e não ao objeto utilizado hoje em dia para se conectar à Internet, capaz de realizar milhares de milhões de operações aritméticas por segundo. No caso da URSS, um computador poderia ser imaginado como sendo um funcionário do partido sentado em algum escritório da Gosplan, realizando somas e subtrações à toda velocidade, o que implicava em duas grandes limitacões: o tamanho do problema a ser resolvido era bem limitado e os erros de cálculo eram a norma. Entretanto, tais limitações já foram superadas graças aos computadores atuais, uma vez que eles podem realizar as mesmas operações, sem falhas e a uma velocidade inimaginável para um ser humano. Neste caso, o cálculo econômico racional seria possível se dispusermos de algoritmos e recursos de computação suficientes para resolver o problema da programação linear rápido o suficiente [48].

4.1. O conceito de complexidade

A análise da *complexidade computacional* é um ramo do estudo de algoritmos que tenta responder justamente à pergunta de se um determinado problema matemático pode ser resolvido sob as condições tecnológicas atuais. A complexidade de um algoritmo é dada pela relação entre o número de operações aritméticas simples e o número de variáveis do problema. Por exemplo, para contar o número de caracteres em uma frase (p.e., a frase "Vamos planejar!", que tem 15 caracteres), é necessário unicamente iterar (ou passar) por cada caracter, começando pelo primeiro, e a cada nova iteração somar 1 a um contador que originalmente estava em 0. Cada uma destas duas operações, iterar e somar, são repetidas para cada novo caracter, pelo que dizemos que esta função tem uma complexidade n, onde n é o número de caracteres na frase. Para expressar a complexidade de um algoritmo utilizamos a notação chamada de O-grande (ou "Big O"), a qual expressa que o número de operações do algoritmo é *proporcional* ao, mas não exatamente, o número de variáveis do nosso problema n. Portanto, dizemos que

[47] Nos seus próprios termos: "Tem sido afirmado que em uma economia socialista seria possível resolver o problema do cálculo econômico por meio da implementação de equações, considerando a descrição feita pela economia matemática das condições de equilibrio econômico. [...] [No entanto] Hayek (1935) estima o ordem de magnitude do número de equações e cálculos necessários como sendo centenas de milhares. [...] é claro que a multiplicidade de dados, e o correspondente estabelecimento das equações, é uma tarefa árdua que vai além da planificação central. A impossibilidade prática de se levar a cabo as propostas relacionadas com esta ou com qualquer solução similar é certamente indiscutível"[46].

a complexidade de contar os caracteres em uma frase é de $O(n)$.

Mas então por que não se obter o número exato de operações? Isso pode ser mais complexo do que pode parecer à primeira vista, já que depende de muitos fatores diferentes, como o processador no qual se executará o algoritmo, a linguagem de programação utilizada para implementá-lo, quão eficiente é a implementação em si, etc. Portanto, a notação O grande proporciona uma boa aproximação sob a cual pode-se agrupar os algoritmos segundo sua complexidade sem levar em conta todos estes fatores.

Dizemos que um algoritmo é ”viável” ou suficientemente ”rápido” para ser executado nos computadores atuais se pertence à classe de algoritmos com complexidade P. São chamados de P os algoritmos que podem ser resolvidos em tempo (P)olinomial; ou seja, que seu tempo de execução está delimitado por uma expressão polinomial do tipo $O(n^k)$ onde k é uma constante positiva. Dentro deste grupo, dizemos que os problemas de complexidade linear $O(n)$ (i.e., $k = 1$) são os que possuem o grau de complexidade mais baixo, seguidos de perto pelos de complexidade logarítmica $O(n\,log(n))$. No nível seguinte de dificuldade, ainda podendo ser resolvidos de maneira eficiente nos computadores atuais, estão os problemas com complexidade polinomial de ordem maior que 1 (i.e., $k > 1$), por exemplo $O(n^2)$ o $O(n^3)$ para $k = 2$ e $k = 3$, respectivamente.

Do outro lado estão os problemas de tempo polinomial não-determinístico (conhecidos como problemas de complexidade *NP* por sua trascrição em inglês *Non-deterministic Polynomial time*), que têm uma complexidade $O(e^n)$.[48] Dizemos de maneira precisa que este último grupo de problemas é computacionalmente intratável, uma vez que o número de operações cresce exponencialmente com o número de variáveis, o que esgotaria rapidamente até os computadores mais rápidos. À princípio, esta divisão entre problemas simples e complexos pode parecer um pouco abstrata, sobretudo quando não compreendemos exatamente o que significa um logaritmo ou uma função exponencial. Porém, ao comparar as diferentes funções de complexidade em um mesmo gráfico, o motivo desta divisão se torna nitidamente claro, como pode-se observar na Figura 11.

Podemos ilustrar as diferenças entre os problemas de tipo P e NP com um exemplo. A complexidade da multiplicação dos números primos tem complexidade baixa, independentemente do tamanho de tais números (por exemplo, $1180 \cdot 1233 = 1{,}454{,}940$ e $1 \cdot 2 = 2$ implicam “uma única” multiplicação).[49] Contudo, se propuséssemos o problema inverso, ou seja, encontrar os dois números primos que multiplicados entre si dão certo número, pode chegar a parecer um problema simples em pequena escala (p. ex., $15 = 3 \cdot 5$), mas se torna extremamente complicado conforme os números se fazem ligeiramente maiores (p. e., quais dois números primos têm como resultado $8{,}003$ ao serem multiplicados entre si?[50]). À primeira vista, o problema de encontrar os números primos pode não parecer muito interessante, mas a criptografia se baseia justamente na dificuldade de se resolver esse tipo de problemas e graças

[48] O número de Euler e é aproximadamente 2,718.

[49] A multiplicação de números inteiros é de complexidade $O(n \log n)$ desde 2019. Ver Algoritmos de multiplicação.

[50] Alerta de Spoiler: $8{,}003 = 53 \cdot 151$

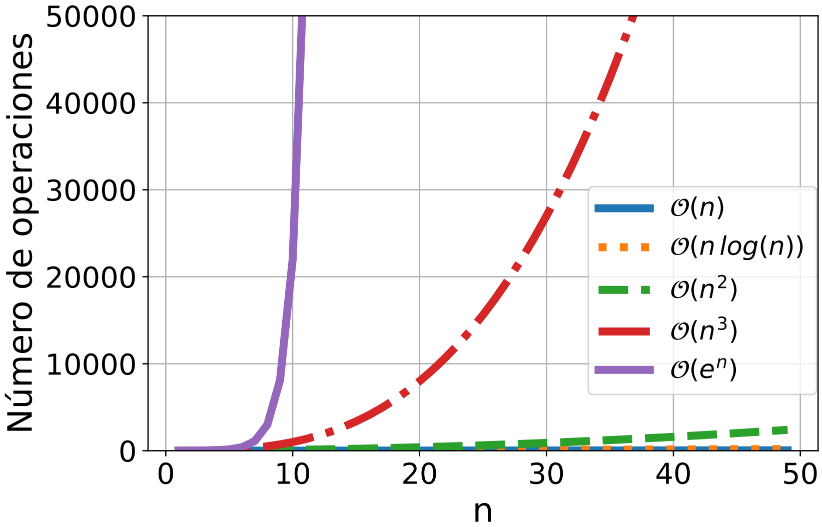

Figura 11: Evolução da complexidade computacional em função de n.

à ela podemos, por exemplo, evitar que nossos dados sejam visíveis para qualquer pessoa ao transmiti-los quando nos conectamos a um ponto de acceso de Wi-Fi.

Parece evidente que os casos linear, logarítmico e polinomial $O(n^2)$ representam uma complexidade bem menor que o resto. No outro extremo está a complexidade exponencial, que de maneira extremamente rápida se aproxima de uma evolução quase vertical. Nós seres humanos não estamos acostumados a lidar com tais magnitudes, o que torna o conceito exponencial pouco intuitivo. Talvez com um exemplo o leitor possa ter uma ideia melhor: o número de átomos no universo conhecido[51] é estimado, no menor dos casos, como sendo de 10^{80} (o número 1 seguido de 80 zeros). Uma função exponencial superaria este valor já com $n = 185$! Em outras palavras, se n fosse o número de produtos em uma economia, os algoritmos de complexidade exponencial não poderiam ser utilizados nem mesmo para planejar uma economia familiar. O leitor mais atento terá notado que, à primeira vista, a complexidade polinomial $O(n^3)$ tenderia a um comportamento parecido, mas crescendo em um ritmo inferior. Nada poderia estar mais longe da realidade! A chave para se compreender este assunto está no ponto $n = 10$, no qual a complexidade exponencial é dez veces maior que a polinomial $O(n^3)$. Esta diferença crescerá de maneira *exponencial* a cada incremento de n, o que faz com que na realidade elas não sejam nada parecidas. Este último tipo de problemas exigiriam mais tempo para se chegar aos seus resultados, mas os computadores atuais ainda podem processá-los em uma velocidade suficiente para que possamos decidir que são viáveis de se executar, inclusive para valores elevados de n.

Uma vez apresentadas as diferentes complexidadees que um algoritmo poderia representar, ainda falta responder à questão de como obter a complexidade de um determinado algoritmo. Este é um exercício fundamental para que se possa comprender de verdade o que é a

[51] https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe#Matter_content%E2%80%94number_of_atoms

complexidade computacional. A Sección 2 introduziu a matriz inversa de Leontief como sendo um elemento fundamental para a planificação econômica. Portanto, a complexidade implicada na inversão de uma matriz quadrada é um exercício excelente para que possamos comprender a complexidade computacional no âmbito do planejamento. Para isso, vamos nos basear no método Gauss-Jordan[52] para inverter matrízes. É importante ressaltar que este método não é o mais eficiente de todos, mas sua simplicidade faz com que ele seja tremendamente didático.

4.2. Inversão de Matrizes: o Método Gauss-Jordan

Suponhamos uma matriz quadrada A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

que, além disso, admite matriz inversa. O método Gauss-Jordan consiste em encontrar as operações "elementais"[53] que converterão a matriz A na matriz identidade I. Uma vez encontradas, tais operações deverão ser aplicadas, na mesma ordem, à matriz identidade I para se obter a matriz inversa A^{-1}.

À seguir vamos expor, passo a passo, as operações a serem realizadas para converter A em I:[54]

1. Dividir a linha 1 por $a_{1,1}$. Operações realizadas: 3 divisões.
2. Subtrair da linha 2 a linha 1 multiplicada por $a_{2,1}$. Operações realizadas: 3 multiplicações e 3 subtrações.
3. Subtrair da linha 3 a linha 1 multiplicada por $a_{3,1}$. Operações realizadas: 3 multiplicações e 3 subtrações.

Depois destes três primeiros passos, a matriz A passou a ser a matriz A', cuja primera coluna é idêntica à primeira coluna de I:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix}.$$

[52] https://es.wikipedia.org/wiki/Eliminaci%C3%B3n_de_Gauss-Jordan

[53] Estas operações consistem em somar a uma linha múltiplos de outra linha, multiplicar uma linha por um escalar (um número real) no nulo, trocar a ordem das linhas. O leitor interessado em se aprofundar sobre Álgebra Linear pode consultar, por exemplo, [**AlgebralinearI**, **AlgebralinearII**]. Há centenas de bons livros tratando do tema de maneira extensiva.

[54] Podemos supor que $a_{1,1} \neq 0$ pois como A admite matriz inversa, nenhuma coluna de A pode ter todas as entradas nulas, e portanto, alterando a ordem das linhas, sempre podemos garantir que seja assim.

4. Dividir a linha 2 por $a'_{2,2}$.[55] Operações realizadas: 2 divisões (lembrando que $\frac{0}{a'_{2,2}} = 0$).
5. Subtrair da linha 3 a linha 2 multiplicada por $a'_{3,2}$. Operações realizadas: 2 multiplicações e 2 subtrações.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & 1 & a''_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix}$$

6. Dividir a linha 3 por $a''_{3,3}$.[56] Operações realizadas: 1 divisão.

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & 1 & a''_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste ponto, a diagonal da matriz já tem todos os seus componentes como 1. Agora basta apenas proceder da mesma maneira, mas no sentido inverso.

7. Subtrair da linha 2 a linha 3 multiplicada por $a''_{2,3}$. Operações realizadas: 1 multiplicação e 1 subtração.
8. Subtrair da linha 1 a linha 3 multiplicada por $a'_{1,3}$. Operações realizadas: 1 multiplicação e 1 subtração.
9. Subtrair da linha 1 a linha 2 multiplicada por $a'_{1,2}$. Operações realizadas: 1 multiplicação e 1 subtração.

$$A''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Após todas estas operações, $A''' = I$. No total, este processo exigiu um 28 operações aritméticas simples (6 divisões, 11 multiplicações e 11 subtrações).[57] Entretanto, este número é apenas para o caso de A ser uma matriz 3×3. Devemos generalizar o cálculo das operações para uma matriz arbitrária $n \times n$.

[55] Podemos supor, novamente, que $a'_{2,2} \neq 0$, já que nenhuma coluna da submatriz obtida pode ter todas as entradas nulas.

[56] Podemos assumir, novamente, que $a'_{3,3} \neq 0$ pois nenhuma coluna da submatriz obtida pode ter todas as entradas nulas.

[57] As trocas entre as linhas nos casos onde o 'pivô' fosse nulo não supõem nenhuma mudança na complexidade computacional do algoritmo.

4.3. Inversão de matrízes: complexidade

O método Gauss-Jordan podería ser visto como sendo um método iterativo no qual a cada etapa operamos com matrízes menores. Dada a matriz $n \times n$ exibida abaixo e partindo do primeiro *pivô* (os pivôs são os elementos na diagonal que devem passar a ser 1), o objetivo é tornar 0 todos os elementos na sua linha e na sua coluna, para posteriormente passarmos a realizar a mesma operação com a matriz $(n-1) \times (n-1)$.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & & \\ a_{3,1} & & (n-1)\times(n-1) & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & & & & \end{bmatrix}$$

Antes de começar, como antes, assumimos que A admite matriz inversa[58] e consequentemente podemos assumir que $a_{1,1} \neq 0$ pois em caso contrário poderíamos trocar o ordem das linhas para garantir que seja assim.

Para se obter o pivô como 1 é necessário realizar n divisões (dividir a primeira linha por $a_{1,1}$). Para que o primeiro elemento em cada linha i passe a ser 0, teremos de realizar n multiplicações (multiplicar a primeira linha por $a_{i,1}$) e n subtrações (subtrair os n elementos da linha i pelos da linha 1). Esta operação terá de ser repetida para cada uma das $n-1$ linhas. Por último, só faltaria tornar 0 os $n-1$ elementos restantes na primera linha. Cada elemento na coluna j passaría a ser 0 multiplicando o pivô na coluna j por $a_{1,j}$ e subtraindo o resultado da sua posição na primeira fila. Portanto, esta operação precisará de $n-1$ multiplicações e $n-1$ subtrações. Para calcular o total de operações $N(n)$, às operações anteriores teriamos que somar as operações necessarias para uma matriz $(n-1)\times(n-1)$,[59] resultando na equação (28).

$$N(n) = \underbrace{N(n-1)}_{\text{recursividade}} + \underbrace{n}_{\substack{\text{divisões para} \\ \text{tornar 1 o pivô}}} + \underbrace{2 \cdot n \cdot (n-1)}_{\substack{\text{Multiplicações e} \\ \text{subtrações para tornar} \\ \text{0 a coluna}}} + \underbrace{2 \cdot (n-1)}_{\substack{\text{Multiplicações e} \\ \text{subtrações para tornar} \\ \text{0 a linha}}} \;. \tag{28}$$

Os dois últimos termos da soma na equaçã (28) podem ser combinados em um único termo, dando lugar à expressão $N(n) = N(n-1) + n + 2 \cdot (n^2 - 1)$. Chegando neste ponto, precisamos somente continuar com o processo iterativo:

$$N(n-1) = N(n-2) + (n-1) + 2 \cdot ((n-1)^2 - 1) \;. \tag{29}$$

Na equação anterior, simplemente partimos da equação para $N(n)$ e sustituimos n por $n-1$, aplicando deste modo o conceito de *recursividade*. Da mesma maneira, para obter o número

[58] Caso contrário não seria possível atingir o objetivo do algoritmo.

[59] Quando passamos para os sucessivos pivôs, raciocinaríamos como antes para garantir que, alterando a ordem das linhas se fosse necessário, o pivô não seja nulo. Neste artigo assumimos que as trocas das linhas nos casos onde o pivô fosse nulo não alterariam a complexidade computacional.

total de operações teremos de continuar para $n-2$, $n-3$, etc. Seguiremos como o processo até chegamos a $N(1) = 1$, porque a menor matriz que encontraremos é a matriz 1×1 que corresponde ao último pivô, e que precisa de uma única divisão para se tornar 1. Expressando em notação matemática, a complexidade do método Gauss-Jordan será determinado por:

$$C = \sum_{k=1}^{n} [k + 2 \cdot (k^2 - 1)] = \sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} 1 \,. \tag{30}$$

Como passamos de C à notação O-grande? (alerta de spoiler, nessa notação, a complexidade final será de $O(n^3)$) Por sorte, a ecuação (30) pode ser simplificada utilizando-se alguns truques matemáticos. O primeiro deles é bastante evidente: somar n vezes 1 é igual a n. Por outro lado, o primeiro termo de C é aquilo que se conhece na Matemática como uma *progressão aritmética*, a qual pode ser simplificada de uma maneira bastante original:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \,.$$

O que também pode ser reescrito no sentido inverso:

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \,.$$

Somando ambas as expressões, obtemos que $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$ pois há n somas da forma $j + (n - j + 1) = n + 1$. A expressão para $\sum_{k=1}^{n} k^2$ será obtida a partir da fórmula deduzida anteriormente. Por um lado temos que

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1 \tag{31}$$

e por outro lado obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n} [3k^2 + 3k + 1] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \tag{32}$$

Juntando (31) e (32) podemos eliminar $\sum_{k=1}^{n} k^2$ e, assim, obter

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \,. \tag{33}$$

Chegando neste ponto, a complexidade do método Gauss-Jordan pode ser reescrita como segue:

$$C = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6} \,. \tag{34}$$

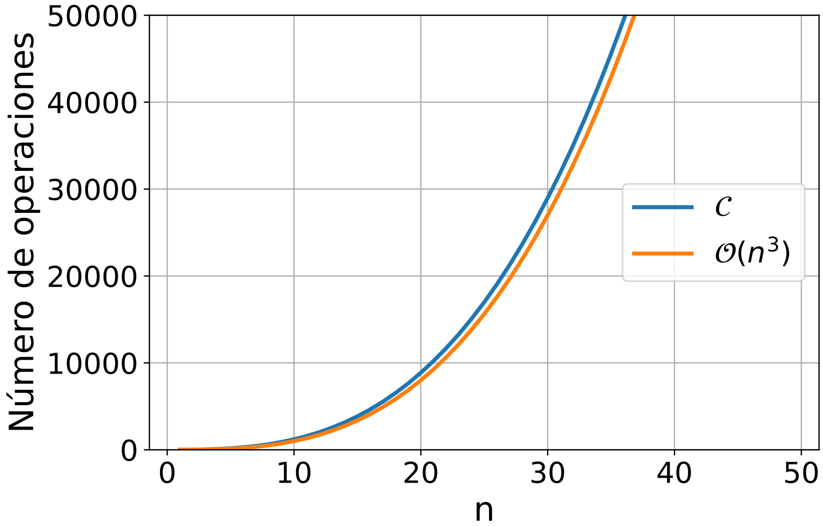

Figura 12: Comparação da complexidade $O(n^3)$ com o número exato (C) de operações do método Gauss-Jordan.

Recomendamos ao leitor resolver a equação (34) para $n = 3$ e comprovar que de fato obtemos o mesmo resultado calculado para a matriz 3×3 na seção 4.2.

Neste ponto, resta apenas o último passo, que é obter a complexidade na notação O-grande. Para um n suficientemente grande, o elemento de maior exponente na expressão obtida vai dominar a complexidade total (ver a Figura 12). Por isso, podemos ignorar as constantes e os termos de menor expoente e nos referir diretamente ao elemento de maior expoente. Portanto, a complexidade computacional do Método de Gauss-Jordan é de $O(n^3)$.

4.4. Complexidade e planejamento econômico

Uma vez compreendido o conceito de complexidade computacional, estamos em posição pra nos perguntar: seria possível utilizar o método simplex para planificar uma economia moderna? Ao longo das últimas décadas, foram apresentadas diferentes propostas para resolver os problemas de programação linear, todas elas com complexidade polinomial, como exposto no quadro 4. A possibilidade (ou impossibilidade) de se utilizar tais algoritmos para planificar uma economia dependerá do valor final de n, o número de produtos a serem produzidos.

Podemos assumir que, em uma economia moderna com altos níveis de especialização, o número de produtos é proporcional (mas provavelmente inferior) ao número de habitantes, já que a elaboração de certos produtos complexos (p. e., veículos, moradias, computadores, etc.) exigem o trabalho de mais de uma pessoa. Portanto, podemos reconhecer que um limite superior para o parâmetro n seria, sendo generosos, da ordem de 10^9, no caso da tentativa de se planejar toda a economia mundial ou economias do tamanho da India ou da China. Bem, desde 2006 já somos capazes de resolver problemas de tal magnitude em menos de uma hora utilizando supercomputadores que executam cálculos paralelizados utilizando milhares de processadores [49].[60] No caso de problemas mais modestos, com o número de produtos n na orden de 10^6, os processadores de 4 núcleos da maioria dos computadores de emesa seriam suficientes [51].

Autor	**Ano**	**complexidade**
Khachiyan	1979	$O(n^6)$
Karmarkar	1984	$O(n^{3,5})$
Renegar	1988	$O(n^{2,873})$
Vaidya	1989	$O(n^{2,5})$
Lee e Sidford	2015	$O(n^{2,5})$
Cohen, Lee e Song	2020	$O(n^{2,373})$

Tabla 4: complexidade computacional dos diferentes algoritmos propostos para o método simplex [52].

Como vemos, o *problema do cálculo econômico* no socialismo, ao menos a partir do ponto de vista técnico, não é absolutamente insolúvel.Tanto as análises de complexidade computacional quanto os resultados empíricos demonstram que manipular problemas de otimização do tamanho das economias atuais é nitidamente algo viável. No entanto, é preciso advertir que o problema do cálculo econômico não se coloca apenas em termos *técnicos*, tal como fizemos até o momento, mas também teria um caráter puramente *econômico*, relacionado com a valoração e a decisão humana sobre os fins e os meios da atividade produtiva [48, 53]. É precisamente neste último ponto que tem se focado parte da crítica austríaca atual à economia planificada e é por isso que, na CibCom, tratamos este tema como sendo uma das chaves para para que possamos voltar a colocar a planificação socialista no tabuleiro.

[60] As últimas investigações neste âmbito foram levadas a cabo por Tomas Härdin em [50], onde analiza as capacidades dos supercomputadores atuais para resolver problemas lineares com matrízees dispersas (i.e., com a maioria das entradas sendo iguais a 0), já que podemos esperar que os insumos de cada uma das indústrias seja um subconjunto pequeno de todos os produtos disponíveis em uma economia, dando lugar a matrízes tecnológicas dispersas.

5. Conclusões

Grande parte dos problemas da planificação econômica ensaiada nos chamados "países do socialismo real" são hoje remediáveis mediante uma utilização adequada de certos instrumentos matemáticos e computacionais modernos. Por mais complexa que seja se aproximar desses instrumentos logo de início, é possível realizar uma abordagem pedagógica que nos permita avaliar as suas implicações práticas. O problema econômico, resumido na introdução sob o título de "logística, desenvolvimento, viabilidade", recebe uma resposta nítida, coerente e sólida a partir do programa cibercomunista.

Relativamente à primeira questão, a intenção é gerenciar as questões logísticas de forma mais precisa e eficiente do que os mercados capitalistas e seus mecanismos: a concorrência disciplinaria entre capitais independentes e a lucratividade monetária como incentivo unidimensional e generalizado. Além disso, pretende-se fazer isso evitando os vícios já mencionados da pioneira economia soviética; principalmente, planejar o número de bens de cada tipo tentando antecipar ou prever as necessidades dos cidadãos. Que lições podemos tirar daí? Quais são as exigências que derivam do nosso desenvolvimento?

1. A avaliação e os preços dos bens deve manter uma *proporcionalidade com seus custos sociais* e considerar, organicamente, a escassez dos recursos naturais.
2. A planificação deve se estabelecer em relação às necessidades efetivamente expressas em uma pluralidade de instâncias sociais, formando um *sistema de retroalimentação entre a Administração e suas distintas ramificações* em diferentes escalas.[61]
3. É necessário um *sistema contábil universal alternativo* para poder representar ou homogeneizar distintos conjuntos de bens com uma única unidade comum. Se não formos capazes de utilizar uma unidade não monetária, o uso do dinheiro prevalecerá, com todos os problemas que isso acarreta.

Bem, começando por este último, o ciber-comunismo contempla os chamados *custos de mão de obra integrados* como sendo a única magnitude capaz de assumir essa função. As vantagens que eles fornecem são basicamente duas. A primeira e mais evidente é que, incorporados dentro uma *metodología insumos/produtos*, eles estabelecem os fundamentos para a elaboração de planos econômicos em detalhes. Durante o processo que indicamos para calcular os CMOI de cada tipo de bem, é necessário determinar quantas unidades de cada tipo de outros produtos são necessários para se produzir uma unidade de qualquer outro bem. É graças a isso que podemos levar a cabo nossa estratégia básica de planificação: determinar, a partir da *matriz tecnológica*, a quantidade de unidades de cada tipo de bem que é preciso produzir para satisfazer uma *demanda final em constante atualização*. Como vimos, para isso, precisamos apenas calcular a matriz inversa de Leontief.

[61] Tal como tentaremos explicar nos próximos tempos, a partir do ponto de vista do ciber-comunismo, "a democracia [direta] é importante, não [apenas] por razões morais, mas por ser capaz de capturar, de forma detalhada e na maior quantidade possível, as informações sobre a demanda, assim como captar boas ideias que atualmente são ignoradas pelo sistema de mercado" [54].

A segunda vantagem é algo que somente mencionamos de passagem: os CMOI permitem estabelecer um sistema de compensação alternativo aos salários tal como os conhecemos, baseado em *certificados, tokens ou créditos de trabalho*. Este sistema permite adquirir certos tipos de benes de consumo en lojas ou estoques públicos sem problemas de desequilíbrios persistentes entre oferta e demanda efetiva (descritos no Apêndice A). Para mais informações sobre esta proposta, recomendamos ler [10].

Em qualquer caso, a fórmula do êxito da organização ciber-comunista da logística é a socialização da atividade econômica; uma *centralização administrativa* que nos permita conhecer e mobilizar os recursos disponíveis democraticamente, superando a opacidade informacional constitutiva da propiedade privada.

Em outra ordem de coisas, encontraríamos a problemática do desenvolvimento. Em toda economia avançada, com múltiplas industrias e técnicas de produção para cada um dos productos, é necessária uma *função de distribução* de recursos entre as diferentes tarefas econômicas. Nas sociedades capitalistas, esta função é levada a cabo pelo mercado, con suas desastrosas crises periódicas derivadas da concorrência, e a função empresarial, com a falta de controle democrático da economia que esta implica. No seu lugar, propomos a expropiação dos meios de produção e sua gestão coletiva mediante ferramentas de otimização matemática para a execução das decisões econômicas adoptadas. A optimização permite maximizar ou minimizar certa função objetivo, como poderiam ser a quantidade de trabalho em uma sociedade ou o CO_2 emitido, mantendo em consideração os limites biofísicos do sistema (quantidade de matrias primas consumidas, horas de trabalho disponíveis, etc.). Utilizando este enfoque alternativo conseguimos uma maior eficiência, uma vez que se estariam tomando decisões ótimas dado certo nível tecnológico, e, por sua vez, permitimos um controle democrático sobre a economia, seja por meio de plebiscitos ou por meio do consumo da população refletido na demanda.

A metodología básica apresentada para dar resposta a estes problemas é a *programação linear*, que consistente em otimizar funções lineares em um poliedro convexo. Como pudemos apreciar, ela é incrivelmente versátil. A família de problemas, tanto microeconômicos quanto macroeconômicos, que podem ser formalizados como problemas de programação linear é gigantesca.

Não obstante, como se pode imaginar, a joia da coroa da iniciativa ciber-comunista é a promessa de que todos estos cálculos e operações são computáveis em um tempo razoável e com uma aproximação suficiente; em outras palavras, é a promessa de que ela é capaz de responder ao chamado problema da viabilidade.

A ideia de que isto seria impossível, de que não se pode resolver o problema do cálculo econômico democraticamente, é apreciada em quase todos os rincões do espectro político. Desde os liberales até os socialistas de mercado, passando por distintas formas de social-democracia, encontramos pessoas repitindo os argumentos da escola austriaca. Contudo, os grandes avanços nas últimas décadas com relação a algoritmos de otimização mais eficientes e computadores mais rápidos parecem indicar totalmente o contrário.

É bem conhecido o fato de que a programação linear é fácilmente tratável com computadores por meio de algoritmos como o *simplex*. Por sua vez, problemas não-lineares mais específicos, tais como os custos fixos, as economias e deseconomias de escala ou as variáveis inteiras podem encontrar resposta quando reduzimos sua escala de maneira adecuada. Para cada desafio, há propostas algorítmicas que permitem enfrentá-lo a fim de poder maximizar as vantagens do plano: linearização por partes, otimização não convexa, programação inteira mista, inteligência artificial, etc.

Para que possamos nos certificar sobre isso, este documento ofereceu uma introdução à análise da complexidade computacional, a qual permite analizar de forma sistemática a complexidade, seja na forma de recursos computacionais ou em tempo de cálculo, de se resolver um determinado algoritmo. Acreditamos que toda crítica que se preze ao problema do cálculo econômico devería partir das ferramentas oferecidas pela análise de complexidade computacional. Os estudos referenciados neste artigo demonstram que, no estado técnico atual, já somos capazes de resolver problemas de otimização para economias de escala planetária, pelo que a suposta impossibilidade do cálculo econômico não parece se sustentar.

Para finalizar, não é demais sublinhar que, para facilitar a exposição, o desenvolvimento deste documento foi marcado por premissas simplificadoras, enumeradas em 2.2. Para entrar en detalhes e comprovar como estas questões podem ser tratadas de maneira mais realista é necessário "arregaçar as mangas" e mergulhar no trabalho que vem sendo desenvolvido atualmente por especialistas como Cockshott, Dapprich o Härdin. Isso não significa que não tenhamos uma intenção política clara: demonstrar, mediante o esclarecimiento de suas arestas mais técnicas, a vitalidade do projeto comunista e as bases sobre as quais ele pode se assentar.

Sublinhemos algo que nem sempre se explicita: não é preciso ser um gênio da Cibernética para descobrir o que há de "mágico" neste programa de investigação. A grande maioria de nós não terá motivos para precisar inventar nenhuma técnica matemática nem para reajustar a complexidade computacional de nenhum plano quinquenal. Nossa iniciativa de divulgação com este nível de profundidade pretende, antes de tudo, que cada vez mais setores de nossa classe sejamos conscientes de que tudo isso existe, para que possamos *compreender* quão esperançoso é o que estas investigações insinuam. Esta é nossa mensagem para todos os que sentimos os grilhões do capital: camaradas, há possibilidades para a nossa desejada democracia, essa semente que vem germinando lentamente, quem sabe para quais colheitas futuras, e cujos brotos não tardarão em rebentar a terra!

Agradecimentos

Agradecemos encarecidamente à ajuda oferecida por todos os camaradas que fizeram possível o aperfeicoamento e o desenvolvimento deste artigo. Isto inclui nossos professores Paul Cockshott, Tomas Härdin, Ian Wright, Dave Zachariah y Fahd Boundi, mas também os compaheiros e as companheiras de CibCom e ADH (Association for the Design of History, "Associação para o projeto da história") que revisaram este trabalho em múltiplas ocasiões. Seu compromisso e influência os converte em indiscutíveis co-autores desta obra coletiva. Agradecemos também ao artista Igor Savin, cujo trabalho serviu como inspiração para a ilustração da capa.

Sobre o CibCom

CibCom é um coletivo interdisciplinar de origem espanhola, mas com projeção na América Latina, dedicado à investigação e difusão do emergente ciber-comunismo (acrônimo do nosso nome): a proposta orquestrada por Víktor Glushkov e Stafford Beer na segunda metade do século XX, e desenvolvida por Paul Cockshott e Allin Cottrell nas ultimas décadas. As nossas fileiras são compostas por estudantes e especialistas tanto do mundo das Matemáticas, da Física e da Engenharia da Computação e de Telecomunicações, quanto da Filosofia, da Economia e da Sociología, que, a partir de um paradigma marxista, insistem na necessidade de superação da economia de mercado.

Aspiramos a revitalizar as tradições revolucionárias depois de décadas de tropeços, fracassos e retrocessos. Acreditamos que para que o movimento dos trabalhadores recupere seu potencial transformador ele deve reafirmar sua projeção pós-capitalista. Para isso, nos dedicamos, principalmente, à estruturação de um corpo teórico sólido e coerente sobre aquilo que consideramos como sendo o principal dispositivo institucional de um programa político socialista: a planificação democrática da economia. Devemos voltar a desnaturalizar a propiedade privada. O poder dos trabalhadores deve poder ser concretizado.

Apêndices

A. Por que os bens de consumo devem ser ”precificados” em função de seus custos de mão de obra integrados?

Nesta seção vamos analisar porque os desequilibrios persistentes entre a oferta e a demanda na URSS não eram nenhuma casualidade - pelo contrário, eram inevitáveis, uma vez que não se mantinha nenhuma proporcionalidade entre a ”precificação”, a demanda efetiva e os custos de mão de obra integrados (CMOI).

Tal como considerava K. Marx, por exemplo em [55], o planejamento econômico não pode ter outra base que não sejam os fluxos de tempo de trabalho entre os diferentes ramos de produção: “Uma vez assumida a produção coletiva, a determinacão do tempo, como é obvio, passa a ser essencial.[...] Economia do tempo: a isto se reduz, no fim das contas, toda economia.[...] Economia do tempo e reparticão planejada do tempo de trabalho entre os distintos ramos da produção acabam sempre sendo a primera lei econômica sobre a base da produção coletiva”. Consequentemente, comecemos tornndo explícitas as relacões intersetoriais que representam fluxos de tempos de trabalho. Vamos agregar a economia em três setores:

(I) a produção de meios de produção.

(II) a produção de meios de consumo individual que são adquiridos em estabelecimentos públicos em troca de certificados de trabalho ou outro sistema de retribução.

(III) a provisão de serviços através do caixa comunal, ou seja, os indivíduos não utilizan certificados de trabalho ou outra forma de retribuição social pelo trabalho realizado para adquiri-los, tais como os hospitais e as escolas.

O produto final (em horas de trabalho) do Setor (I) denominaremos de bens de produção (incluindo madeira, aço, cimento, ...etc) e o denotaremos por m, e denotaremos por M_1, M_2, M_3 aos totais dos benes de produção utilizados nos Sectores (I), (II) e (III), respectivamente. Sabemos que os bens de produção se desgastam, assumamos por simplicidade que uma fração δ dos mesmos se desgasta a cada ano. Então, para manter cada setor em estado de repouso precisamos de $\delta M_1, \delta M_2, \delta M_3$ horas de trabalho por ano, respectivamente. Se m_g é o crescimiento final anual de m teremos

$$m_g = m - (\delta M_1 + \delta M_2 + \delta M_3) \; . \tag{35}$$

Suponhamos que o total de pessoas trabalhando (vamos chamar de P) se divide em P_1, P_2, P_3 pessoas trabalhando respectivamente no Sector (I), (II) e (III). Para tornar esta seção o mais geral possível, podemos assumir qualquer sistema de retribuição que seja uniforme e ubícuo, no qual o resto dos custos sejam expressos e com o qual se possa adquirir os bens do Sector (II), como foi o rublo como aunidade monetária na URSS.[62] Uma vez fixado o sistema de retribução, todos os fluxos de trabalho devem ser expressos em tal unidade comum, já que, caso

[62]Não obstante, nós propomos abolir o dinheiro e adoptar os certificados ou tokens de trabalho como unidade de retribução, mas, a fim de não perder generalidade, tratamos de outros casos.

contrário, não há nenhuma maneira de coordenar os diferentes setores da economia, ou seja, ela se converte na unidade contábil sobre a qual a planificacão econômica se assenta.

Por simplicidade vamos assumir que todas as jornadas de trabalho são iguais. Chamemos de w o salário de cada trabalhador[63] no sistema de retribuição escolhido. O total de custos expressos na unidade contábil escolhida de m chamaremos de c. Chamemos de C_1, C_2, C_3 aos custos contábeis respectivos de cada setor. Dado que cada setor tem como gastos os bens de produção desgastados e os salários das pessoas trabalhando ali, teremos as seguintes equações:

$$C_1 = c\delta M_1 + wP_1 \ , \tag{36}$$

$$C_2 = c\delta M_2 + wP_2 \ , \tag{37}$$

$$C_3 = c\delta M_3 + wP_3 \ . \tag{38}$$

Chamemos de b ao produto final do Setor (II) (em horas trabalhadas) e de p à quantidade de unidades contáveis que b representa. Por simplicidade assumimos que as pessoas não são capazes de acumular unidades contábeis ao final de cada ano; informalmente, que elas não poupam. Se t é a taxa de imposto sobre a renda, teremos

$$pb = w(P_1 + P_2 + P_3)(1 - t) \ . \tag{39}$$

Até aqui c era uma variáble completamente independente do resto, porém, a maneira correta de definir c é dividindo os custos contábeis do Setor (I) entre o número de horas de trabalho que o produto final do mesmo setor incorpora, formalmente:

$$c = C_1/m \ . \tag{40}$$

Os impostos totais arrecadados e os “lucros” líquidos do Sector (II) geram o financiamento da acumulacão líquida de novos bens de produção e os custes contábeis do Setor (III),[64] ou seja, temos

$$cm_g + C_3 = tw(P_1 + P_2 + P_3) + pb - C_2 \ . \tag{41}$$

Assim, temos 8 variáveis livres $m_g, c, w, t, p, C_1, C_2, C_3$ e 7 equações que restringem nossas opções. Se a receita pública depender exclusivamente dos impostos, então os preços setoriais deverão corresponder com os custos de mão de obra integrados. Se, pelo contrário, os impostos arrecadados pelaa Administração não forem suficientes para financiar os serviços públicos (Sector III), então os preços dos bens de consumo (Setor II), tem que ser mais elevados que os custos de mão de obra integrados, implicando num efeito inflacionáario.

Até aqui, temos falado apenas sobre as relacões intersetoriais que precisam estar presentes em qualquer economia, agora analizemos as restrições intrasetoriais. Mesmo assumindo que a população se mantenha constante, o consumo individual é bastante variável. Os preços de cada um dos produtos do Setor (II) deverão corresponder aos seus respectivos custos de mão de obra integrados exceto, no máximo, pelas flutuacões derivadas de alterações nos padrões de demanda? Sim, pois essa é a única maneira pela qual os ajustes que as pessoas realizam nos

[63] Todas as horas de trabalho são remuneradas da mesma maneira.

[64] No capitalismo isto não é correto, pois é preciso acrescentar o consumo pessoal dos capitalistas.

seus padrões de demanda seriam compatíveis com a alocação, a priori, da força de trabalho à cada tipo de produto.

Vejamos isso com um exemplo simples; vamos assumir que um grupo de bens de consumo, por exemplo, as mesas, estejam extremamente desvalorizadas em comparacão com outro grupo de bens, por exemplo, as garrafas de vinho. Coloquemos as garrafas de vinho como tendo um preço próximo ao seu custo de mão de obra integrado enquanto que as mesas tem a metade do preço de seu custo de mão de obra integrado. Os consumidores poderiam trocar parte do seu consumo de garrafas de vinho por mesas. Digamos, por exemplo que eles decidem reduzir seu consumo de garrafas de vinho pelo equivalente a 5 milhões de horas de trabalho e gastá-las, ao invés, em mesas. Levando em consideração o fato de que os preços das mesas equivalem à metade de seus custos de mão de obra integrados, parece que essas cinco milhões de horas de trabalho que serão destinadas ao consumo de mesas (no lugar de garrafas de vinho) poderiam ser suficientes para comprar 10 milhões de horas de trabalho em mesas. Contudo, mesmo se os trabalhadores que no passado produziram essas 5 milhões de horas de trabalho de garrafas de vinho fossem transferidos à produção de mesas, isso não seria suficiente para produzir as 10 milhões de horas de trabalho demandadas em mesas. Porém, em geral, se os preços não são proporcionais aos custos de mão de obra integrados, nem à a demanda efetiva, as alterações nos padrões dos consumidores,[65] implicariam ou em uma demanda grande demais para que seja possível satisfazê-la com o tamanho da populacão ativa, ou então, caso a mudança seja de um tipo de bem para algum outro que esta sobre-avaliado, em que uma certa porcão da força de trabalho seja redundante.

Outros problemas que poderiam surgir com a subvenção de produtos seriam, por um lado, a criação de mercados negros, uma vez que, como já referido anteriormente, haveria escassez de produtos e inclusive acumulação desses produtos por certos grupos e, por outro lado, existiria uma dualidade nos preços dos produtos subvencionados, entre o seu preço real no estrangeiro e seu preço local.

Portanto, um dos problemas que a URSS enfrentava persistentemente era uma consequência inevitável das políticas econômicas implementadas. A lição é bem simples de aprender: devemos poder calcular de maneira exata os custos de mão de obra integrados de todos os tipos de artigos e distribuir os benes de consumo das lojas públicas em troca do equivalente aos seus custos de mão de obra integrados para poder coordinar de maneira satisfatória a economia, sem problemas persistentes de desabastecimentos e superprodução.

[65]Ou seja, que quando deixam de gastar o equivalente a um certo número de horas de trabalho em um tipo de artigo e passam a gastá-lo com outro tipo de artigo.

Referências

1. Hayek, F. The Use of Knowledge in Society. ["O uso do conhecimento na sociedade"]. *The American Economic Review* **35,** 519-30 (4 1945) (vid. pág. 1).
2. IPCC. Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change . (2021) (vid. pág. 3).
3. Agencia Estatal de Meteorología (AEMET). Nota Informativa ICOS-España nº1. https://izana.aemet.es/nota-informativa-icos-espana-no1-el-observatorio-de-izana-vuelve-a-registrar-en-mayo-2021-un-maximo-historico-en-la-concentracion-de-dioxido-de-carbono-co2-el-covid-19-no-ha-frenado-el-incremento-d-2 (2021) (vid. pág. 3).
4. Palomino, M. Industria Fabril y Crecimiento Económico de la Unión Soviética: una Mirada desde la Histórica Económica. **21,** 179 (2018) (vid. pág. 4).
5. Stalin, J. *Problemas Económicos del Socialismo en la URSS.* (Ediciones en Lenguas Extranjeras, 1952) (vid. pág. 4).
6. Bettelheim, C. La transición a la economía socialista. 269-272 (1974) (vid. pág. 4).
7. Cockshott, P. y Cottrell, A. A More Critical Look at Market Socialism. ["Um olhar mais crítico sobre o socialismo de mercado"] (2009) (vid. pág. 5).
8. Wright, I. The Social Architecture of Capitalism. ["A arquitetura social do capitalismo"] (2004) (vid. pág. 5).
9. Dragulescu, A. y Yakovenko, V. M. Statistical mechanics of money. ["Mecânicas estatísticas do dinheiro"]. arXiv: arXiv:cond-mat/0001432 (2000) (vid. pág. 5).
10. Cockshott, P. y Cottrell, A. Valor, mercados y socialismo. https://cibcom.org/valor-mercados-y-socialismo (1997) (vid. págs. 5, 56).
11. O'Neil, J. Cálculo Socialista y Valoración Ambiental: Dinero, Mercado y Ecología. https://cibcom.org/calculo-socialista-y-valoracion-ambiental-dinero-mercado-y-ecologia (2021) (vid. pág. 5).
12. Benanav, A. Como fazer um lápis: se a gente quiser, o capitalismo acaba. https://digilabour.com.br/como-fazer-um-lapis-se-a-gente-quiser-o-capitalismo-acaba/ (2020) (vid. pág. 5).
13. Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático.* 3ª edición (McGraw Hill, 1980) (vid. pág. 13).

14. Zhang, Y. Gaussian Elimination and Matrix Inverse. ["Eliminação gaussiana e matriz inversa"]. https://www.caam.rice.edu/~zhang/caam335/F14/handouts/gaussian_elimination.pdf (2010) (vid. págs. 13, 14).

15. Leontief, W. Quantitative Input and Output Relations in the Economic Systems of the United States. ["Relações quantitativas de insumos-produtos nos sistemas econômicos dos Estados Unidos"]. *The Review of Economics and Statistics* **18,** 105-125 (3 1936) (vid. pág. 16).

16. Leontief, W. *Input-Output Economics. ["Economia de insumos-produtos"]* (Oxford University Press, 1986) (vid. pág. 16).

17. Leontief, W. Domestic Production and Foreign Trade; The American Capital Position Re-Examined. ["Produção nacional e comércio internacional: a posição do capital estadunidense re-examinada"]. *Proceedings of the American Philosophical Society* **97,** 332-349 (4 1953) (vid. pág. 16).

18. Cockshott, P. y Cottrell, A. Cálculo, Complexidade e Planejamento: O Debate do Cálculo Socialista, Uma Vez Mais. https://ominhocario.wordpress.com/2019/04/19/de-volta-ao-debate-sobre-o-calculo-socialista-calculo-complexidade-e-planejamento/ (1993) (vid. pág. 17).

19. Cockshott, W. P. y Cottrell, A. *Towards a new socialism. ["Por um novo socialismo"]* (Spokesman, Nottingham, England, 1993) (vid. págs. 17, 26).

20. Cockshott, P. Input-output or Harmony planning. ["Insumos-e-produtos ou planejamento-Harmonia"]. https://paulcockshott.wordpress.com/2019/05/14/input-output-or-harmony-planning/ (2019) (vid. pág. 17).

21. Härdin, T. La solución del cálculo económico [6]: Programación entera mixta. https://cibcom.org/la-solucion-del-calculo-economico-6 (2022) (vid. págs. 17, 42).

22. Farjoun, E. *The Production of Commodities by Means of What? ["A produção de mercadorias por meio de quê?"]* en *Ricardo, Marx and Sraffa; The Langston Memorial Volume.* (1984), 11-43 (vid. pág. 17).

23. Farjoun, E., Machover, M. y Zachariah, D. How Labor Powers the Global Economy: A Labor Theory of Capitalism. ["Como o trabalho alimenta a economia global: uma teoria trabalhista sobre o capitalismo"] (2022) (vid. pág. 17).

24. Cockshott, P. y Zachariah, D. Classical labour values – properties of economic reproduction. ["Valores-trabalho clássicos - propriedades da reprodução econômica"]. *World Review of Political Economy* (2018) (vid. pág. 17).

25. Shaikh, A. y Antonopoulos, R. *Explaining long term exchange rate behavior in the United States and Japan. ["Explicando o comportamento da taxa de câmbio de longo prazo nos Estados Unidos e no Japão"]* (Routledge, 2013) (vid. pág. 18).

26. Nápoles, P. R. *Costos unitarios laborales verticalmente integrados por rama en México y Estados Unidos, 1970–2000.* (Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Economía, 2010) (vid. pág. 18).

27. Morishima, M. *Equilibrium stability, and growth: a multi-sectoral analysis. ["Estabilidade de equilíbrio e crescimento: uma análise multi-setorial"]* Reprint. with corr. 227 págs. (Clarendon Press, Oxford, 1978) (vid. págs. 21, 25).

28. Morishima, M. *Marx's economics: a dual theory of value and growth. ["Economia de Marx: uma teoria dual do valor e do crescimento"]* Reprinted. 198 págs. (Cambridge Univ. Pr, Cambridge, 1977) (vid. págs. 23-25).

29. Horn, R. A. y Johnson, C. R. Matrix Analysis. ["Análise matricial"] (2013) (vid. pág. 25).

30. Stoer, J. y Bulirsch, R. Introduction to Numerical Analysis ["Introdução à Análise Numérica"] (2002) (vid. pág. 26).

31. Arandiga, F., Donat, R. y Mulet, P. Mètodes Numérics per a l'Àlgebra Lineal ["Métodos Numéricos para a Álgebra Linear"] (2000) (vid. pág. 26).

32. Ortega, J. y Rheinboldt, W. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables ["Solução iterativa de equações não-lineares com muitas variáveis"] (1970) (vid. pág. 26).

33. Atkinson, K. y Han, W. Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework ["Análise Numérica teórica: um quadro de Análise Funcional"] (2009) (vid. pág. 26).

34. Amat, S. *y col.* Aproximació numèrica (2002) (vid. pág. 26).

35. Phillips, L. y Rozworski, M. *The People's Republic of Walmart: How the World's Biggest Corporations are Laying the Foundation for Socialism. ["República Popular do Walmart: como as maiores corporações mundiais estão estabelecendo os fundamentos para o socialismo"]* (Jacobin, 2019) (vid. pág. 28).

36. Nieto, M. Dynamic Efficiency in a Planned Economy: Innovation and Entrepreneurship Without Markets. ["Eficiência dinâmica em uma economia planejada: inovação e empreendedorismo sem mercados"]. *Science and society* **84,** 42-66 (1 2020) (vid. pág. 28).

37. Nieto, M. Entrepreneurship and Decentralised Investment in a Planned Economy: A Critique of the Austrian Reading. ["Empreendedorismo e investimento descentralizado em uma economia planejada: uma crítica à leitura austríaca"]. *Historical Materialism* (2021) (vid. pág. 28).

38. Bazaraa, M. y Jarvis, J. Programación lineal y flujo en redes. (2004) (vid. pág. 34).

39. Kantorovich, L. Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. ["Métodos matemáticos de organização e planejamento de produção"]. *Management Science* **6,** 366-422 (4 1939) (vid. págs. 34, 38).

40. Kantorovich, L. The Best Use of Economic Resources. ["O melhor uso dos recursos econômicos"] (1965) (vid. pág. 38).

41. Shalizi, C. In Soviet Union, Optimization Problem Solves You. ["Na União Soviética, são os problemas de otimização que te resolvem"]. www.crookedtimber.org/2012/05/30/in-soviet-union-optimization-problem-solves-you/ (2012) (vid. pág. 40).

42. West, D. K. Cybernetics for the command economy: Foregrounding entropy in late Soviet planning. ["Cibernética para a economia de comando: Trazendo a entropia para o primeiro plano no planejamento soviético tardio"]. *History of the Human Sciences* **33,** 36-51 (1 2020) (vid. pág. 40).

43. Schrijver, A. *Theory of linear and integer programming ["Teoria da programação linear e inteira"]* (John Wiley & Sons, 1998) (vid. pág. 43).

44. Fujimoto, T. Non-linear Leontief models in abstract spaces ["Modelos não-lineares de Leontief em espaços abstratos"]. *Journal of Mathematical Economics* **15,** 151-156 (1986) (vid. pág. 43).

45. Samothrakis, S. Artificial Intelligence inspired methods for the allocation of common goods and services ["Métodos inspirados na Inteligência Artificial para a alocação de bens e serviços comuns"]. *Plos one* **16,** e0257399 (2021) (vid. pág. 44).

46. Von Mises, L. Las ecuaciones de economía matemática y el problema del cálculo económico en un estado socialista. *Ensayos de Economía* **26,** 229-234 (2016) (vid. pág. 45).

47. Von Mises, L. *Economic calculation in the socialist commonwealth. ["Cálculo econômico na comunidade socialista"]* (Lulu Press, Inc, 2016) (vid. pág. 45).

48. Cockshott, P. Von Mises, Kantorovich and in-natura calculation. ["Von Mises, Kantorovich e cálculo in-natura"]. *European Journal of Economics and Economic Policies: Intervention,* 167 (2010) (vid. págs. 45, 53).

49. Gondzio, J. y Grothey, A. *Solving nonlinear financial planning problems with* 10^9 *decision variables on massively parallel architectures. ["Resolvendo problemas de planejamento financeiro não-linear com* 10^9 *variáveis de decisão em arquiteturas massivamente paralelas"]* en *Computational Finance and its Applications II.* **43** (2006), 95 (vid. pág. 53).

50. Härdin, T. Towards large scale linear planning. ["Por um planejamento linear de grande escala"]. https://www.xn--hrdin-gra.se/blog/2022/02/04/towards-large-scale-linear-planning (2022) (vid. pág. 53).

51. Bienstock, D. Potential Function Methods for Approximately Solving Linear Programming Problems: Theory and Practice. ["Métodos-Função potenciais para resolver de maneira aproximada problemas de Álgebra Linear"] (2001) (vid. pág. 53).

52. Härdin, T. La solución del cálculo económico [1]. Cibernética, política y álgebra lineal dispersa. https://cibcom.org/la-solucion-del-calculo-economico-hardin1 (2022) (vid. pág. 53).

53. Nieto, M. en *Ciber-comunismo: planificación económica, computadoras y democracia.* 231 (2017) (vid. pág. 53).

54. Härdin, T. Prices and information. ["Preços e informação"]. http://www.xn--hrdin-gra.se/blog/2021/11/14/prices-and-information/ (2021) (vid. pág. 55).

55. Marx, K. *Elementos Fundamentales para la Crítica de la Economía Política (Grundrisse): I. [Ed. brasileira: Grundrisse: manuscritos econômicos de 1857-1858. São Paulo: Boitempo; Rio de Janeiro: Ed. UFRJ, 2011.]* Vigésima edición (Siglo XXI editores, 2007) (vid. pág. 59).