Cálculo en especie, de Neurath a Kantorovich (II)

Paul Cockshott

ciber-comunismo

3.3. El método de Kantorovich

A principios de los años 30 no se conocían técnicas algorítmicas que resolvieran el problema más general en el que puede haber producción conjunta y múltiples técnicas posibles para producir productos individuales. Pero, en 1939 [25], al matemático soviético Leonid Kantorovich se le ocurrió un método que más tarde se conocería como *programación* u *optimización lineal*, por el que acabaría recibiendo los premios Stalin y Nobel. Al describir su descubrimiento, escribió:

> *Descubrí que toda una gama de problemas del más diverso carácter relacionados con la organización científica de la producción (cuestiones de la distribución óptima del trabajo de máquinas y mecanismos, la minimización de la chatarra, la mejor utilización de las materias primas y materiales locales, combustible, transporte, etc.) conducen a la formulación de un solo grupo de problemas matemáticos (problemas extremos). Estos problemas no son directamente comparables a los problemas considerados en el análisis matemático. Es más correcto decir que son formalmente similares, e incluso resultan formalmente muy simples, pero el proceso de resolución con el que uno se enfrenta a ellos [es decir, por análisis matemático] es casi completamente inutilizable, ya que requiere la solución de decenas de miles o incluso millones de sistemas de ecuaciones para completarlo. He logrado encontrar un método general comparativamente simple de resolver este grupo de problemas que sea aplicable a todos los problemas que he mencionado, y que sea lo suficientemente simple y eficaz para que su solución sea completamente alcanzable en condiciones prácticas ([25], p. 368).*

Lo significativo del trabajo de Kantorovich fue que demostró que era posible, a partir de una descripción en términos puramente físicos de las diversas técnicas de producción disponibles, utilizar un procedimiento matemático concreto para determinar qué combinación de técnicas cumplirá mejor los objetivos del plan. Desafió indirectamente a von Mises[1], tanto al demostrar que el cálculo en especie es posible, como al mostrar que puede haber una función objetivo escalar no monetaria: el grado en que se cumplen los objetivos del plan.

Los problemas prácticos que le preocupaban surgieron mientras trabajaba en la industria de la madera contrachapada. Quería determinar la forma más eficaz de utilizar un conjunto de máquinas para maximizar la producción. Supongamos que estamos haciendo un producto final que requiere dos componentes, A y B. En total, estos deben suministrarse en cantidades iguales. También contamos con tres tipos de máquinas cuyas productividades se muestran en la Tabla 3.

Supongamos que configuramos cada máquina para producir el mismo número de As y Bs. Las tres fresadoras pueden producir 30 As por hora o 60 Bs por hora. Si las tres máquinas producen As durante 40 minutos en esa hora y Bs durante 20 minutos, entonces pueden producir 20 de cada una. Aplicando divisiones de tiempo similares, podemos producir 36 As y Bs en los tornos revólver y 21 As y Bs en el torno revólver automático (Tabla 4).

[1] No hay indicios de que estuviera al tanto de von Mises en ese momento.

Tabla 3: Primer ejemplo de Kantorovich

Tipo de máquina	# máquinas	output por máquina		output total	
		As	Bs	As	Bs
Fresadoras	3	10	20	30	60
Tornos revólver	3	20	30	60	90
Tornos revólver automáticos	1	30	80	30	80
Max. total				120	230

Tabla 4: Ejemplo de asignaciones de output de Kantorovich.

Tipo de máquina	Solución simple		Mejor solución	
	As	Bs	As	Bs
Fresadoras	20	20	26	6
Tornos revólver	36	36	60	0
Tornos revólver automáticos	21	21	0	80
Total	77	77	86	86

Pero Kantorovich continúa demostrando que esta asignación de máquinas no es la mejor. Si asignamos el torno automático a producir solo Bs, el torno revólver a producir solo As, y dividimos el tiempo de las fresadoras para que pasen 6 minutos por hora produciendo Bs y el resto produciendo As, la producción total por hora aumenta de 77 As y Bs a 86 As y Bs.

El concepto clave aquí es que cada máquina debe asignarse preferentemente a la producción de la pieza para la que es relativamente más eficiente. La eficiencia relativa de producción de As/Bs de las tres máquinas fue: fresadora = $^1/_2$; tornos revólver = $^2/_3$; torno automático = $^3/_8$. Claramente, el torno revólver es relativamente más eficiente en la producción de As, el torno automático es relativamente más eficiente en la producción de Bs y la fresadora se encuentra entre ambos. Por tanto, el torno automático está configurado para producir sólo Bs, los tornos revólver para producir sólo As y el tiempo de las fresadoras se divide para asegurar que se produzca un número igual de cada producto.

El proceso de decisión se muestra en forma de diagrama en la Figura 1. La clave para la construcción del diagrama y del algoritmo de decisión es clasificar las máquinas en orden de sus productividades relativas. Si se hace esto, se obtiene un polígono convexo cuyos segmentos de línea representan las diferentes máquinas. Las pendientes de los segmentos de línea son las productividades relativas de las máquinas. Uno comienza a la izquierda con la máquina que es relativamente mejor para producir B, luego se mueve a través de las máquinas en orden descendente de productividad relativa. Debido a que la productividad relativa disminuye monótonamente, se garantiza que el límite será convexo. Luego, se calcula la intersección de la línea de 45 grados que representa el mismo output de As y Bs con el límite de este polígono. Este punto de intersección es la forma óptima de cumplir con el plan. El término programación lineal se deriva del hecho de que las funciones de producción están representadas por líneas rectas en el caso de 2 productos, planos para 3 productos y, para el caso general de dimensiones superiores, mediante funciones lineales. Es decir, funciones en las que las variables solo aparecen elevadas a la potencia 1.

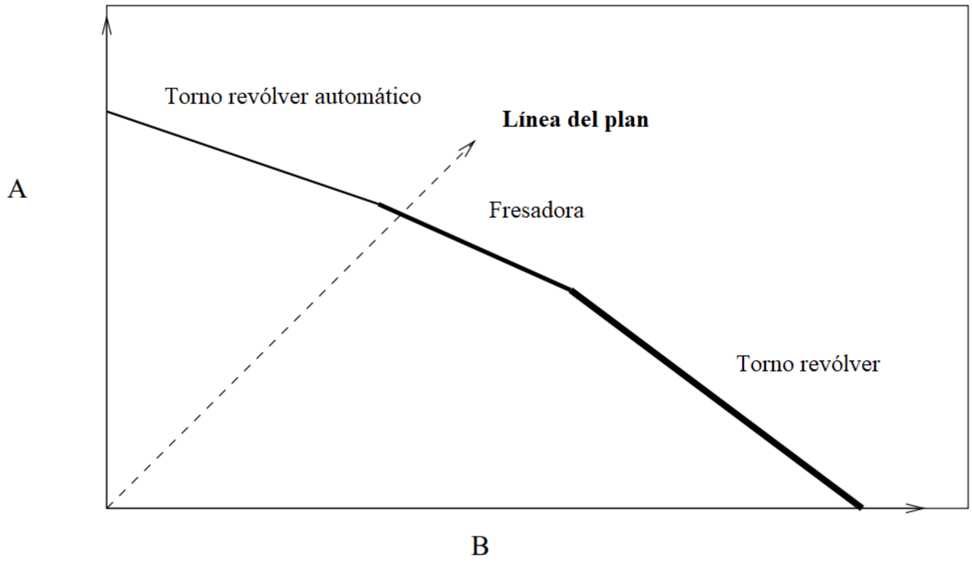

Figura 1: Diagrama del ejemplo de Kantorovich. La línea del plan es el lugar geométrico de todos los puntos en el que la producción de As es igual a la producción de Bs. La frontera de posibilidades de producción está formada por segmentos de línea recta cuyas pendientes representan las productividades relativas de las distintas máquinas para los dos productos. En conjunto, estos forman un polígono. El objetivo del plan se cumple mejor donde la línea del plan cruza el límite de este polígono.

La pendiente del límite donde se cruza con la línea del plan fue llamada por Kantorovich ratio de resolución. Cualquier máquina cuya pendiente sea menor que ésta debe asignarse para producir Bs. Cualquier máquina cuya pendiente sea mayor, debe asignarse para producir As.

Cuando solo se consideran dos productos, el método es sencillo y se presta a la representación esquemática. Pero puede manejar problemas de mayores dimensiones, involucrando 3 o más productos. En estos casos, no podemos usar soluciones gráficas, pero Kantorovich proporcionó un algoritmo mediante el cual las ratios de resolución para diferentes pares de outputs podrían llegar a ella a través de aproximaciones sucesivas. El trabajo de Kantorovich era desconocido fuera de la URSS hasta finales de los años 50 y antes de eso, Dantzig había desarrollado de forma independiente un algoritmo similar para resolver problemas de programación lineal, el llamado método simplex [12]. Posteriormente, se ha incorporado a las herramientas de software disponibles gratuitamente[2]. Estos paquetes te permiten introducir el problema como un conjunto de ecuaciones lineales o desigualdades lineales que luego resuelven.

[2] Por ejemplo, `lp_solve` y `GLPK`.

Algoritmo 2: Ejemplo de Kantorovich como introducción de ecuaciones en `lp_solve`.

```
A;
m1<=3;
m2<=3;
m3<=1;
A-B=0;
m1-0.1 x1a - 0.05 x1b=0;
m2-0.05 x2a - 0.033333 x2b=0;
m3- 0.033333 x3a - 0.0125 x3b=0;
x1a+x2a+x3a - A=0;
x1b+x2b+x3b - B=0;
int A;
```

En Occidente, la programación lineal se utilizó para optimizar el uso de las instalaciones de producción que operan dentro de un mercado capitalista. Esto significó que la función objetivo que se maximizó no era una combinación fija de productos (en el primer ejemplo de Kantorovich, el mismo número de partes A y B), sino el dinero que se obtendría de la venta del producto: precio A × número de As + precio B × número de Bs. Los manuales y libros de texto producidos en asociación con el software de programación lineal occidental asumen este tipo de objetivo. Sin embargo, como veremos, uno puede formular fácilmente el problema de Kantorovich usando este tipo de software agregando ecuaciones adicionales. Ahora mostraremos cómo se puede usar el paquete `lp_solve` para reproducir la solución de Kantorovich a su problema.

El programa requiere que se introduzca una expresión a maximizar o minimizar seguida de una secuencia de ecuaciones o desigualdades. En el Algoritmo 2 introducimos el problema de Kantorovich en el formato que requiere `lp_solve`. En este ejemplo usamos las siguientes variables:

variable	significado
A	número de unidades producidas de A
B	número de unidades producidas de B
m1	número de fresadoras usadas
m2	número de tornos revólver usados
m3	número de tornos revólver automáticos
xij	número de unidades de j producidas por la máquina i

Por tanto, x1a es el output de As en las fresadoras.

La primera línea de input es la función objetivo a maximizar. Introducimos esto como A, lo que significa maximizar el output de A. Las siguientes líneas dan las restricciones a las que se someterá el proceso de maximización.

```
A-B=0
```

Esta es otra forma de escribir que A = B, o que deben producirse cantidades iguales de A y B.

```
m1<=3
```

Esto significa que el número de fresadoras utilizadas debe ser menor o igual a 3. Se usan los caracteres ‘<’ ‘=’ porque ≤ no está disponible en teclados de computadora. Se proporcionan restricciones similares para las otras máquinas.

```
m1-0.1x1a-0.05x1b=0
```

Esto especifica $m1 = 0.1x1a + 0.05x1b = {}^{1}/_{10}\ x1a + {}^{1}/_{20}\ x1b$, o en palabras, que asignar una fresadora para producir A usa $^{1}/_{10}$ de una hora de fresadora, y que asignar una fresadora para producir una unidad de B usa $^{1}/_{20}$ de una hora de fresadora. Proporcionamos ecuaciones de producción similares para las otras máquinas.

```
x1a+x2a+x3a-A=0
```

Esto nos dice que la producción total de A es igual a la suma de los outputs de A de cada una de las máquinas. Proporcionamos una ecuación similar que define la producción de B.

Tengamos en cuenta que todas las ecuaciones deben tener variables y constantes a la izquierda y una constante a la derecha. Uno puede reorganizar fácilmente las ecuaciones de esta forma. La última línea especifica que el número de unidades producidas de A debe ser un número entero. Cuando las ecuaciones se introducen en lp_solve, este produce la respuesta:

```
Valor de la función objetivo: 86
Valores reales de las variables:
A                 86
B                 86
x1a               26
x1b               6
x2a               60
x2b               0
x3a               0
x3b               80
m1                2.9
m2                3
m3                1
```

Que reproduce exactamente la propia solución a la que Kantorovich llegó usando su algoritmo (Tabla 4).

3.4. Generalizando el enfoque de Kantorovich

En su primer ejemplo, Kantorovich trata un problema muy simple, producir dos bienes en proporciones iguales usando un pequeño conjunto de máquinas. Él lo sabía, incluso en 1939 las aplicaciones potenciales de la planificación matemática eran mucho más amplias. Ahora observaremos dos cuestiones que él consideró importantes para la aplicación más general del método.

1. Producir bienes finales en una proporción definida en lugar de cantidades estrictamente iguales.
2. Tener en cuenta el consumo de materias primas y otros insumos.

Supongamos que, en lugar de querer producir una unidad de A para cada unidad de B, como puede ser el caso si estamos ensamblando motores en carrocerías de coche, queremos producir cuatro unidades del bien A para cada unidad de B, como sería el caso de ensamblar las ruedas en la carrocería (ignorando la rueda de repuesto). El método de Kantorovich también podría lidiar con esto. Considérese la Figura 1 de nuevo. En la línea del plan se muestra en un ángulo de 45º una pendiente de uno. Si dibujamos la línea del plan con una pendiente de cuatro, la intersección con la frontera de (posibilidades) de producción nos dará la solución. Dado que este enfoque geométrico solo sirve para dos bienes, vamos a considerar las consecuencias algebraicas.

Ahora, deberías estar convencido de que es posible resolver el problema original de Kantorovich[3] mediante métodos algebraicos. En el Algoritmo 2 especificamos que $A – B = 0$ o, en otras palabras, $A = B$; si uno quisiera cuatro unidades de A por cada una de B tendríamos que especificar $A = 4B$ o, expresándolo en la forma típica de la optimización lineal, $A – 4B = 0$. Supongamos que A expresa los motores y B las ruedas. Si ahora decimos que las ruedas vienen en packs de cuatro, entonces podemos reconfigurar el problema en términos de producir los mismos packs de ruedas que motores. Introducimos una nueva variable $\beta = 4B$ para expresar los packs de ruedas, y reescribimos las ecuaciones en términos de β, para poder volver a una ecuación especificando el resultado conjunto en la forma $A – \beta = 0$, que sabemos que tiene solución.

¿Cómo tratamos el consumo de materias primas o productos intermedios?

En nuestro ejemplo anterior teníamos variables como `x1b`, que representaban el output de productos B en la máquina 1. Esto era siempre una cantidad positiva. Supongamos que hay un tercer bien que debe ser considerado, la electricidad, y que cada máquina consume electricidad a una velocidad diferente, dependiendo de qué esté produciendo. Llamaremos a la electricidad C e introduciremos las nuevas variables `x1ac`, `x1bc`, etc., referidas a cuánta electricidad gasta la máquina 1 para producir A y B. Ahora, añadimos ecuaciones especificando cuánta electricidad es consumida por cada máquina realizando cada tarea, así el modelo mostrará el total de electricidad consumida.

Ahora sabemos cómo:

[3] En realidad, este era su “problema A”.

1. Usar el enfoque de Kantorovich para especificar que los bienes finales deben producirse en proporciones determinadas.
2. Usarlo también para tener en cuenta el consumo de materias primas y otros insumos.

Si podemos realizar estas dos tareas, podemos, en principio, hacer cálculos en especie para el conjunto de una economía planificada. Dado un resultado combinado de bienes de consumo y de inversión para maximizar y unos recursos actuales, un sistema de ecuaciones e inequaciones lineales puede ser resuelto para establecer la estructura del plan. Empezando por lo sencillo, optimizando el output de una madera de contrachapado en diferentes máquinas, a Kantorovich se le ocurrió un enfoque matemático que puede extenderse al problema de optimizar las operaciones de una economía entera.

3.5. Un segundo ejemplo

Consideremos un ejemplo más complicado, donde tenemos que elaborar un plan para una economía simple. Imaginemos una economía que produce tres bienes: energía, alimentos y máquinas. La producción utiliza mano de obra, energía eólica e hidráulica y dos tipos de tierra: tierras fértiles del valle y de las tierras altas, más pobres. Si construimos presas para aprovechar la energía hidráulica, algunas tierras fértiles se inundarán. Por otra parte, la energía eólica se puede producir en tierras montañosas sin comprometer su uso para la agricultura. Queremos elaborar un plan que haga el uso más racional de nuestros escasos recursos de personas, ríos y tierras.

Con el fin de planificar racionalmente, debemos saber cuál va a ser la composición del resultado final (la línea de Kantorovich). Para simplificar, asumiremos que el consumo final se compone de alimentos y energía, y que queremos consumir estos en la proporción de 3 unidades de alimentos por unidad de energía. También tenemos que proporcionar las ecuaciones relativas a las productividades de nuestras diversas tecnologías y el total recursos disponibles para nosotros.

Los valles son más fértiles. Cuando cultivamos alimento en un valle, cada valle requiere 10.000 trabajadores, 1.000 máquinas y 20.000 unidades de energía para producir 50.000 unidades de alimentos. Si cultivamos alimentos en tierras altas, entonces cada área del suelo produce sólo 20.000 unidades de alimentos utilizando 10.000 trabajadores, 800 máquinas y 10.000 unidades de energía.

La electricidad se puede producir de dos maneras. Una presa produce 60.000 unidades de energía, utilizando un valle, 100 trabajadores y 80 máquinas. Un molino de viento produce 500 unidades de electricidad, utilizando 4 trabajadores y 6 máquinas, pero la tierra en la que se encuentra todavía se puede utilizar para la agricultura.

Asumiremos que la producción de máquinas utiliza 20 unidades de electricidad y 10 trabajadores por máquina producida.

Por último, estamos limitados por la mano de obra total, que asumiremos que consta de 104.000 personas.

Las Tablas 5 y 6 muestran cómo podemos expresar las limitaciones de la economía y del plan en forma de ecuaciones. Si las introducimos en lp_solve, obtenemos el plan que se muestra en la Tabla 7. El solucionador de ecuaciones muestra que los objetivos del plan pueden alcanzarse si no se construyen presas, generando toda la electricidad utilizando 541 molinos de viento y dedicando los valles fluviales a la agricultura.

También muestra cómo puede repartirse el trabajo de la mejor manera entre las actividades: 40.000 personas deben trabajar en la agricultura de los valles, 109 en la de las tierras montañosas, 2.164 deben trabajar en la producción de energía y 61.727 en la de máquinas.

Tabla 5: Variables en la economía de ejemplo

e	Producción total de energía
e_c	Gasto de energía en los hogares
f	Comida
v	Valles
w	Molinos de viento
m	Máquinas
d	Presas
u	Valles donde no hay presas
h	Tierras montañosas
f_h	Producción agrícola en las montañas
f_v	Producción agrícola en los valles

Los resultados que hemos obtenido no eran, de ninguna manera, obvios al principio. No estaba claro si era mejor usar todos los valles para la agricultura en lugar de construir presas en algunos de ellos. De hecho, si son mejores las presas o los molinos de viento depende del sistema al completo y no solo de sus tasas individuales de producción eléctrica. Podemos ilustrar esto considerando qué pasaría si la fuerza de trabajo se reduce a la mitad, en 52.000 personas.

Si añadimos esta limitación al sistema de ecuaciones, encontramos que el uso óptimo de recursos ha cambiado. Ahora, el plan implica 1 presa y 159 molinos de viento. Si reducimos la población un poco más, hasta 50000 personas, el plan óptimo implica inundar dos valles con las presas y construir tan solo 23 molinos de viento. ¿Por qué?

Tabla 6: Limitaciones de recursos y productividades en nuestra economía de ejemplo

Combinación final de productos	$f = 3ec$
Número de valles	$v = 4$
Uso de valles por las presas	$v-u = d$
Producción agrícola de los valles	$f_v = 50000u$
Trabajo agrícola en los valles	$l_v = 10000u$
Gasto de energía en los valles	$e_v = 20000u$
Maquinaria agrícola en los valles	$m_v = 1000u$
Producción agrícola de las montañas	$f_h = 20000h$
Trabajo agrícola en las montañas	$l_h = 10000h$
Gasto de energía en las montañas	$e_h = 10000h$
Maquinaria agrícola en las montañas	$m_h = 800h$
Producción total de energía	$e = 500w+60000d$
Trabajadores de la energía	$l_e = 100d+4w$
Maquinarias en la producción de energía	$m_e = 80d+6w$
Trabajadores fabricando máquinas	$l_m = 10m$
Gasto de energía en la maquinaria	$e_m = 20m$
Gasto total de energía	$e_m + e_v + e_h + e_c \leq e$
Maquinaria usada	$m_e + m_h + m_v \leq m$
Cantidad de comida producida	$f = f_h + f_v$
Fuerza de trabajo	$l_m + l_e + l_v + l_h \leq 104000$

Conforme la población se reduce, no hay suficientes personas disponibles para trabajar en los valles y producir maquinaria agrícola. Bajo estas circunstancias, la alta fertilidad de los valles no tiene importancia, es mejor usar uno o más de ellos para generar electricidad. Aplicar el enfoque de Kantorovich hace posible para un plan socialista hacer dos cosas que von Mises había creído imposibles:

1. Permite que el plan tome en cuenta la escasez de recursos naturales, en este caso, las tierras limitadas en valles fluviales que pueden utilizarse para otros usos.
2. Permite que se tomen decisiones racionales entre diferentes tecnologías, en este caso, entre molinos de viento y energía hidráulica y entre agricultura de tierras altas y bajas.

Tabla 7: Plan para la economía del ejemplo utilizando lp_solve

d (presas)	0
e	270500
f	200218
h	0,0108889
m	6172,71
u	4
v	4
w (molinos de viento)	541
e_c	66739,3
e_h	108,889
e_m	123454
e_v	80000
f_h	217,778
f_v	200000
l_e	2164
l_h	108,889
l_m	61727,1
l_v	40000
m_e	2164
m_h	8,71111
m_v	4000

4. Evaluación

El núcleo del argumento de Mises se relaciona con utilizar de los precios para llegar a un uso racional de bienes intermedios o de capital. Mises argumenta que, en la práctica, sólo los precios monetarios serán suficientes para ello, pero admite que, en principio, otros sistemas de valoración, tales como los valores-trabajo, también serían aplicables. Kantorovich también estuvo muy preocupado por el problema de la valoración relativa [26], y desarrolló lo que llamó *valoraciones objetivamente determinadas* (ODV, por sus siglas en inglés). Estas valoraciones diferían de los precios, ya que un precio implica un intercambio de mercancías por dinero entre dos propietarios. En la URSS todas las fábricas y todos los productos eran propiedad del estado. Cuando los productos se movían de una fábrica a otra, no había venta o compra. Las ODVs eran puras anotaciones numéricas, utilizadas en cálculos económicos, no precios de venta. Él consideró una situación en la que los planificadores tienen que lidiar con varios tipos de fábricas (*A..E*), cada una capaz de producir los bienes 1 y 2, y donde las proporciones de estos se fijan en el plan. Cada clase de fábrica *A..E* tiene diferentes productividades relativas para los dos productos.

A continuación, examinó la rentabilidad aparente de la producción de los bienes 1 y 2 en diferentes valoraciones relativas. Bajo algunos esquemas de precio relativo, todas las fábricas encontrarían que el producto 1 no es rentable en comparación con el producto 2, bajo otras, ocurriría lo contrario. Los esquemas de precios intermedios permitirían que ambos bienes pudieran ser producidos, con algunas clases de fábricas especializadas en 1 y otras en 2. Él da el ejemplo de la ropa infantil como algo que, en las valoraciones administrativamente determinadas que entonces se utilizaban en la URSS, no era rentable producir, y, a menos que las fábricas tuvieran instrucciones de ignorar la rentabilidad del producto, se hubiesen confeccionado muy pocas prendas.

Se pregunta si existe una estructura de valoración relativa que permita a las fábricas concentrarse en la producción más valiosa y, al mismo tiempo, cumplir con los objetivos específicos del plan, llegando a algunas conclusiones:

1. Que entre el gran número de planes posibles siempre hay uno óptimo, que maximice el rendimiento de los objetivos del plan con los recursos actuales.
2. Que en el plan óptimo existe un conjunto de valoraciones objetivamente determinadas (ODV) de bienes que garanticen que cada fábrica:
   a) produzca el output que más contribuirá a maximizar los objetivos del plan.
   b) encuentre que la producción que contribuye a maximizar los objetivos del plan es también la más rentable.
3. Con valoraciones arbitrarias, que difieren de las ODV, estas condiciones puede que no se cumplan y las fábricas que traten de maximizar los beneficios no se especializarán de una manera que cumpla las metas del plan de forma óptima.

Es importante entender que sus ODVs son valoraciones que se aplican sólo para un plan que alcanza de manera óptima un objetivo específico. El procedimiento de Kantorovich para llegar a un plan óptimo implicaba ajustes sucesivos en las ODVs y la especialización de las fábricas hasta que se alcance la combinación apropiada de bienes al mismo tiempo que cada una produce el bien más rentable. Incluso dio varios procedimientos matemáticos diferentes para llegar a tal plan y al sistema de ODVs.

Aunque Kantorovich afirma que el trabajo es en última instancia la única fuente de valor, sus ODVs son valoraciones a corto plazo y difieren de la teoría clásica del valor-trabajo, que dio valoraciones en términos de los costes de reproducción laboral de los bienes a largo plazo, incluidos los costes de reproducción de los bienes de equipo. Kantorovich, por el contrario, se ocupa de las valoraciones que deben aplicarse con el stock actual de medios de producción y recursos laborales. Por ejemplo, él considera el ejemplo de valorar la energía eléctrica en relación con el trabajo. En lugar de hacerlo en términos de la mano de obra necesaria para producir electricidad, asume primero que la potencia eléctrica total disponible es fija, es decir, las centrales eléctricas funcionan a plena capacidad, y luego averigua cuántas horas de trabajo por persona se ahorra mediante el uso de un kilovatio hora adicional de electricidad. Se asume que para llegar a una valoración objetiva de la electricidad en términos de trabajo:

1. Los objetivos del plan deben cumplirse.
2. El plan deberá ser óptimo.

La insistencia de Kantorovich en considerar limitaciones materiales a corto plazo (tantos megavatios de potencia, tal y cual número de máquinas de corte, etc.) da a su obra un carácter intensamente práctico y pragmático, bastante diferente al de la mayoría de los economistas teóricos.

¿Por qué Kantorovich está tan preocupado por las valoraciones y la rentabilidad?

Parece haber dos razones. En primer lugar, debemos tener en cuenta que, para Kantorovich, maximización del beneficio en realidad significaba maximizar el valor de la producción. Esto debe entenderse en el contexto de la práctica soviética, donde se daban incentivos a las minas y las fábricas para cumplir con los objetivos del plan. Si la producción era de un solo tipo de bien, por ejemplo, el carbón, el objetivo podría especificarse en toneladas. Pero si la fábrica producía varios bienes, entonces el objetivo tenía que ser fijado en términos del valor de *x* rublos de una combinación de bienes. Con la estructura de precios 'incorrecta', las plantas intentarían maximizar la producción de los bienes de mayor valor, ignorando los de menor valor, con el resultado de que el suministro agregado de todos los bienes a menudo no coincidía con las proporciones que los planificadores tenían en mente. Esta práctica de fijar los objetivos del plan en términos monetarios reflejaba la limitada capacidad del GOSPLAN para especificar con detalle objetivos en especie, como fueron descritos por [43].

La segunda razón se relaciona con su algoritmo particular para resolver problemas de programación lineal, que utilizan ajustes iterativos de las ODVs iniciales hasta que se logra un plan óptimo.

Estos dos aspectos parecen íntimamente vinculados en su presentación, pero las presuposiciones sobre los incentivos a las fábricas no pasan a un primer plano.

Con algoritmos informáticos, el proceso de resolver un programa lineal se convierte en una “caja negra”. El usuario no necesita preocuparse por detalles como el método de cálculo (si utiliza el enfoque de Kantorovich, Danzig o Karmarkar), excepto en la medida en que esto afecta el tamaño del problema que se puede manejar, como discutiremos en la sección 5. Con los paquetes informáticos, las ODVs ya no serán necesarias para calcular un plan, ¿pero serían necesarios para especificar objetivos para las fábricas?

Esto depende de la capacidad de procesamiento de la información del sistema de planificación. Si fuera capaz de detallar planes totalmente desagregados, entonces, en principio, podría, simplemente, enviar los recursos a las fábricas solo para las cantidades específicas de cada bien. En estas circunstancias, las fábricas no podrían engañar produciendo más artículos de alto valor y menos de bajo valor. De hecho, la misma información que sería necesaria para computar las ODVs de Kantorovich, habría sido suficiente para que el GOSPLAN especificara los pedidos en especie desagregados de los productos que tuviesen valoraciones establecidas.

Queda otro nivel en el que las valoraciones habrían sido útiles: cuando los diseños de los productos se estaban elaborando a nivel local. Si una diseñadora de frigoríficos estaba decidiendo qué componentes utilizar en un nuevo modelo previsto, ella necesitaría alguna forma de saber qué componentes podrían ser, desde un punto de vista social, los más económicos, lo que implica un sistema de valoraciones. Sin embargo, no está claro que el aparato completo de las ODVs sea necesario o apropiado aquí. Las ODVs corresponden a un sistema de costo marginal, más que a uno de coste medio. Reflejan los costes marginales actuales con las limitaciones inmediatas de la producción. El uso de tales costos marginales fue criticado por otros economistas soviéticos [22, 37]. No está claro, en retrospectiva, que hubieran sido más apropiados que un sistema de valoración de coste medio si la planificación era más o menos anual. De hecho, dada las propiedades estocásticas de la economía capitalista real [19], es dudoso que exista, con la excepción de ciertos productos limitados, como el aceite, una diferencia significativa entre los costes medios y marginales en el oeste.

5. Complejidad

La programación lineal, propuesta originalmente por Kantorovich, proporciona, en principio, una respuesta a la afirmación de von Mises de que el cálculo económico racional es imposible sin dinero. Pero esta es una respuesta sólo en principio. La programación lineal sólo sería una solución factible al problema si fuera posible, en la práctica, resolver las ecuaciones requeridas en un plan socialista. Esto a su vez requiere la existencia de un algoritmo práctico para resolverlos, y suficientes recursos de computación para implementar dicho algoritmo. Kantorovich, en un apéndice a la referencia [25], dio con un algoritmo factible, que puede ser ejecutado con lápiz y papel. El algoritmo era suficientemente manejable para que estas técnicas fueran utilizadas resolver problemas prácticos de una escala modesta. Al abordar problemas más grandes, aconsejó el uso de técnicas aproximativas como la agregación de procesos de producción y tratarlos como un proceso compuesto único. Mientras el algoritmo de Kantorovich usa sus ODVs, que antes llamó multiplicadores de resolución, algoritmos posteriores para la programación lineal no, por lo que las ODVs no deben considerarse fundamentales para este campo.

Desde el trabajo pionero en programación lineal en los años 30, la computación ha sido transformado de algo hecho por los ‘ordenadores’ humanos a algo hecho por los electrónicos. La velocidad a la que se pueden hacer los cálculos ha aumentado miles de millones de veces. Ahora es posible utilizar paquetes de software para resolver enormes sistemas de ecuaciones lineales. ¿Pero son las computadoras lo suficientemente potentes para para planificar una economía entera?

En una gran economía como la antigua URSS había probablemente varios millones de tipos diferentes de productos industriales, que van desde las diversas formas de tornillos, arandelas y componentes electrónicos, a grandes productos finales como buques y aviones de pasajeros. Aunque hubo gran entusiasmo por los métodos de Kantorovich en la URSS durante los años 60, la escala de la economía era demasiado grande para que sus técnicas pudieran ser utilizadas para la planificación detallada con la tecnología informática disponible por aquel entonces. En su lugar, se utilizaron para optimizar la producción particular de las plantas industriales o al elaborar planes sectoriales agregados para la economía en su conjunto. ¿Cómo ha cambiado la situación hoy, dado que el poder de los ordenadores ha continuado creciendo a un ritmo exponencial desde la caída de la URSS?

5.1. Clases de complejidad

Para responder a esto es necesario ser capaz de cuantificar la complejidad de una tarea de planificación y compararla con los recursos informáticos disponibles. Medir la complejidad es una rama de la ciencia de los algoritmos. Estos se clasifican en clases de complejidad. Por ejemplo, el cálculo del promedio de una lista de n números se dice que es de complejidad de clase n, porque el número de operaciones aritméticas simples requeridas será proporcional a n. Esta clase de complejidad se denomina lineal, ya que el tiempo de ejecución de los algoritmos en una computadora crece linealmente con el número de elementos.

Un poco más complejos que los algoritmos lineales son los logarítmicos. Resulta que uno puede ordenar una lista de n números en orden ascendente usando $n*log(n)$ operaciones aritméticas básicas. Los problemas que son lineales o log-lineales se consideran muy fáciles de resolver por ordenador.

A continuación, en nivel de dificultad, vienen los problemas polinomiales, donde el número de operaciones aritméticas básicas crece como una función polinómica del tamaño de los datos de entrada. Si un algoritmo tuviera un tiempo de ejecución que fuese proporcional a n^2 o a n^3 para algún tamaño de datos de entrada n, entonces sería de complejidad polinómica. En algoritmia, los problemas polinomiales se consideran tratables, ya que, con ordenadores capaces de hacer miles de millones de operaciones por segundo, tales problemas pueden ser resueltos para valores bastante grandes a n. Por ejemplo, la multiplicación es una operación que puede crecer de manera polinómica en base al número de dígitos de cada término. Si quieres multiplicar 17 por 32, tienes que llevar a cabo los pasos básicos 2×7=14, 2×10=20, 30×7=210, 30×10=300 y después sumar los productos. El número de pasos de la multiplicación crecerá como n^2, donde n es el número de dígitos de los términos.

Más allá de los problemas polinomiales vienen los de clase NP o problemas polinomiales no deterministas. Estos son aquellos donde, si te llevaran al Oráculo de Delfos y la sacerdotisa te dieran una respuesta, podrías saber si es correcta en un tiempo polinomial. Supón que tienes un número x de 100 dígitos y preguntaras a la sacerdotisa cuáles son sus divisores primos, a lo que ella te responde con un número de 47 dígitos y otro de 53. Tu podrías confiar en ella o, teniendo en cuenta muchos de los relatos de quienes han sido confundidos por el Oráculo Divino, decidirte a comprobar si su respuesta era correcta. Si lo fuera, la multiplicación de ambos números deberá dar x como resultado. Esta multiplicación te llevaría del orden de 47×53=2491 operaciones básicas, que es aproximadamente $\frac{1}{4}n^2$ de la longitud del número que le diste a la sacerdotisa. Esto muestra que podemos comprobar la validez de los factores primos supuestos en un tiempo polinómico.

Desgraciadamente, el Oráculo de Delfos cayó en desuso hace tiempo, y nosotros, faltos de esta guía divina que una vez estuvo disponible para los atenienses, debemos encontrar divisores primos por medios mundanos. Una forma normal y determinista es comprobar todos los números primos tal que $y \in [2, \sqrt{x}]$ para ver si $\frac{x}{y}$ es un número entero. El primer y que lo cumpla será un divisor primo. El inconveniente es la gran cantidad de pruebas que deberíamos realizar. Para números de 100 dígitos tendríamos que probar todos los $y \in [2, 10^{50}]$ para estar seguros de encontrar un factor primo, si es que este existe. El número de pruebas crece a una velocidad de $10^{\frac{n}{2}}$, en otras palabras, crece exponencialmente conforme aumenta *n*. Este problema, y otros de esta clase de complejidad exponencial se asumen como computacionalmente intratables, dado que el número de posibilidades a ser comprobadas crece tan rápido que agota pronto la capacidad del ordenador más potente. De hecho, la tarea es tan dura que algunos protocolos criptográficos [49] se basan en grandes divisores primos que son prácticamente imposibles de descubrir.

5.2. La clase de complejidad de la planificación económica

Después de una pequeña introducción a las clases de complejidad, vamos a aplicar estas ideas a la planificación económica. ¿A qué clase de complejidad pertenece la programación lineal?

> *Durante un largo tiempo no se supo si la programación linear pertenecía o no a la clase de complejidad "dura" (a la que pertenece el hombre de negocios que viaja) o a una clase polinomial "fácil" (como a la que pertenece el problema del camino más corto). En 1970, Victor Klee [29] y George Minty inventaron un ejemplo que mostraba que el algoritmo clásico 'simplex' requeriría un número exponencial de pasos para resolver el peor caso de programación linear. En 1978, el matemático ruso L. G. Kachian [28] desarrolló un algoritmo en tiempo polinomial para resolver programas lineales. Es un método interior que utiliza elipsoides inscritos en la región factible. Demostró que el tiempo de computación es siempre menor que una expresión polinómica en las dimensiones del problema y el número de dígitos de datos de entrada. Aunque es un polinomio, el límite que estableció resultó ser demasiado alto para su algoritmo para ser utilizado para resolver problemas prácticos.*
>
> *El algoritmo de Karmarkar [27] fue una mejora importante en el resultado teórico de Khachian que mostró cómo un problema de programación lineal se puede resolver en tiempo polinómico. Además, su algoritmo resultó ser uno que podría utilizarse para resolver programas lineales prácticos (Dantzig [11]).*

Los modernos paquetes de programación lineal tienden a combinar el método simplex de Dantzig con los métodos de punto interior más recientes. Esto permite que las implementaciones más modernas resuelvan problemas de programación que involucran hasta mil millones de variables [21, 20]. Para problemas de tal magnitud, se utilizan grandes supercomputadoras paralelas con más de mil procesadores. Pero incluso con computadoras de 4 CPU mucho más modestas, los problemas de programación lineal de la clase de millones de variables se estaban resolviendo en media hora utilizando métodos de punto interior [13].

Estos avances en algoritmos de programación lineal y en tecnología informática hacen que la programación lineal podría aplicarse ahora a la planificación detallada en una economía completa, en lugar de sólo en un nivel agregado.

6. Deduciendo la línea del plan

Kantorovich asumió que el plan tenía un objetivo dado para optimizar, en la forma de una particular combinación de bienes: la línea del plan. Esto reflejaba la realidad social de los gestores de la industria soviética, ya que se les dio una combinación de productos para producir por el GOSPLAN. Las propias autoridades de planificación, sin embargo, tenían que especificar cuál sería esta combinación de productos finales. En las primeras fases de la planificación soviética, cuando Kantorovich escribió su artículo original, los objetivos establecidos por los planificadores se dirigieron principalmente a lograr una rápida industrialización y construir una base de defensa contra la amenaza de invasión. El proceso de planificación tuvo éxito en el logro de estos objetivos. Pero en un país ya industrializado, en tiempos de paz, la satisfacción de las necesidades sociales actuales se convierte en prioridad y el vector del plan tiene apuntar en esa dirección. Una crítica común a las economías de tipo soviético, y no sólo por sus detractores occidentales, es que no respondían a la demanda del consumidor. Es por lo tanto importante para nuestro argumento general tratar de demostrar que una economía planificada puede responder a la evolución de las preferencias de los consumidores: que la escasez, colas y excedentes de bienes no deseados de los que tanto oímos no son características inherentes de la planificación socialista. Los economistas Dickinson y Lange, que escribieron justo antes de Kantorovich, delinearon un mecanismo práctico por el cual esto podía ser posible [31, 16].

Ellos propusieron que el sector mayorista del estado debería funcionar dentro de un umbral de rentabilidad con precios flexibles. Los gestores mayoristas establecerían precios de equilibrio para los bienes de consumo. Estos precios mayoristas funcionarían como guía para las autoridades del plan, señalándoles si incrementar o disminuir la producción de ciertas líneas de producción. Si los precios fueran altos, deberían incrementarse, siendo reducidos si ocurre lo contrario.

La idea básica es clara, el mismo principio se ajusta a la producción de bienes de consumo en una economía capitalista. Pero aquí surge el problema de cómo se determina si un precio es alto o bajo. ¿Alto o bajo relativo a qué?

¿Qué se tomaría como fundamento del valor?

Después de rechazar incorrectamente la posibilidad de planificación en especie, Mises consideró la posibilidad de que los planificadores socialistas pudieran hacer uso de una unidad de valor objetivamente reconocible, es decir, una propiedad mensurable de las mercancías, para la realización de sus cálculos económicos. El único candidato que Mises tuvo en cuenta para tal unidad es el contenido del trabajo, como en las teorías del valor de Ricardo y Marx. Este último había propuesto que los trabajadores fueran pagados en bonos de trabajo y que los bienes fueran vendidos de la misma forma [33]. Mises terminó rechazando el trabajo como unidad de valor; tenía dos argumentos relevantes, cada uno pretendiendo demostrar que el contenido del trabajo no puede proporcionar una medida adecuada del coste de producción. Estos argumentos se refieren al descuido de los costos de los recursos naturales implícitos en el cálculo de los valores-trabajo y la heterogeneidad de la fuerza laboral. La crítica de Mises al valor-trabajo es muy breve y esquemática. Más o menos dos páginas de argumento sustantivo aparecen en [58] y se reproducen en [60]. Esto sin duda refleja el hecho de que, aunque Marx y Engels había puesto gran énfasis en la planificación como una asignación de tiempo de trabajo, esta concepción había sido más o menos abandonada por los economistas socialistas de habla inglesa de finales de los años 30. Ni Lange ni Dickinson utilizan la teoría clásica del valor en sus argumentos. Escrito en 1930, Appel [1] había puesto un gran énfasis la importancia de la teoría del valor del trabajo para la economía socialista, pero sus ideas fueron mayormente ignoradas. Escritores más recientes han vuelto a poner énfasis sobre la teoría del valor de Marx como guía para la planificación socialista [17, 46, 45, 9].

El principio básico en estos esquemas puede ser definido de manera simple. Todos los bienes de consumo están marcados con sus valores laborales, es decir, la cantidad total de trabajo que se requiere para producirlos, tanto directa como indirectamente. Pero aparte de esto, los precios reales (en bonos de trabajo) de los bienes de consumo serán estimados en la medida de lo posible, en niveles de equilibrio. Supongamos que un elemento en particular requiere 10 horas de trabajo para ser producido. Luego se marcará con un valor de trabajo de 10 horas, pero si surge una demanda excesiva para el artículo cuando se cotiza en 10 bonos de trabajo, el precio se elevará hasta eliminar (aproximadamente) el exceso de demanda. Supongamos que este precio resulta ser de 12 bonos de trabajo. Entonces, este producto tiene una relación entre el precio de liquidación del mercado y el valor de la mano de obra de 12/10, o 1,20. Los planificadores registran esta relación para cada bien de consumo. Esperamos que esta razón varíe de un producto a otro, algunas veces alrededor de 1,00, otras por encima (si hay mucha demanda), y otras por debajo (si este no es popular). Entonces, los planificadores seguirán esta regla: incrementar el objetivo de producción de los bienes con una razón por encima de uno y reducirlo para los que estén por debajo de uno.

La cuestión es que estas razones proporcionan una medida de la eficacia del trabajo para satisfacer las necesidades de los consumidores (producción de 'valor de uso', en la terminología de Marx) en las diferentes industrias. Si un producto tiene una relación del precio de equilibrio al valor trabajo por encima de 1,0, esto indica que la gente está dispuesta a gastar más bonos de trabajo en el artículo (es decir, trabajar más horas para adquirirlo) que el tiempo trabajo requerido para producirlo. Pero esto a su vez indica que el trabajo dedicado a la producción de este producto tiene una eficacia social superior a la media. Por el contrario, si el precio de equilibrio está por debajo del valor-trabajo, esto nos dice que los consumidores no valoran el producto de manera igual a su valor-trabajo: el trabajo dedicado a este bien es de eficacia inferior a la media. La paridad, o una proporción de 1,00, es una condición de equilibrio: en este caso los consumidores 'valoran' el producto, en términos de su propio tiempo de trabajo, a lo que le cuesta a la sociedad producirlo. La viabilidad de utilizar el tiempo de trabajo para expresar los precios depende de la capacidad para calcularlo. Esto puede parecer una tarea desalentadora, pero en realidad implica resolver un conjunto de ecuaciones lineales similares, aunque un poco más fáciles, a las requeridas cuando se elabora un plan coherente. La tarea es, por lo tanto, factible computacionalmente, en los términos que hemos explicado anteriormente.

Mises objetó que el “defecto en el cálculo en términos de trabajo es que ignora la calidad de diferentes trabajos" (1935: 114). Mises señala que la mano de obra cualificada cuenta como un múltiplo de, y por lo tanto puede ser reducido a, 'trabajo simple', pero argumenta que no hay manera de efectuar esta reducción teniendo en cuenta la comparación de los productos de los diferentes trabajos en el proceso de intercambio en un mercado. Las diferencias salariales podrían parecer una solución, pero el proceso de igualación, en este caso, "es un resultado de las transacciones de mercado y no su antecedente." Mises asume que la sociedad socialista funcionará sobre una política de ingresos igualitaria, de modo que las diferencias entre salarios, determinadas por el mercado no estarán disponibles como guía para el cálculo. La conclusión es entonces que "el cálculo en términos de trabajo tendría que establecer una proporción arbitraria para la sustitución de trabajo complejo por trabajo simple, lo que excluye su empleo para una administración económica" (1935: 115).

Es cierto que el trabajo no es homogéneo, pero no hay ninguna base para afirmar que el factor de reducción del trabajo complejo tenga que ser arbitrario bajo el socialismo. Hay dos enfoques posibles:

1. El trabajo cualificado puede ser entendido de la misma manera que Marx trata los medios de producción en El Capital, principalmente como un input terminado que transmite su trabajo incorporado al producto final a lo largo del tiempo. Dado el tiempo de trabajo necesario para producir habilidades y un margen de depreciación para tales habilidades, uno podría calcular una “tasa de transferencia” implícita del tiempo de trabajo incorporado en dichas habilidades. Si denominamos a esta tasa r_i para una habilidad i, entonces un trabajo de este tipo debería ser contabilizado como un múltiplo $(1+r_i)$ de trabajo simple, con el fin de establecer el coste de sus productos. Un proceso iterativo es necesario: primero calcular las tasas de transferencia si todos los inputs fueran trabajo simple y después usar esas tasas del primer paso para volver a calcular los inputs de trabajo calificado, así hasta que se logre una convergencia.
2. Como alternativo, uno puede usar el enfoque de Kantorovich ([26], pp. 64-66) donde muestra que para el trabajo cualificado de diferente tipo pueden asignarse ODVs en base a sus diferentes productividades.

La cuestión sobre qué método usar dependerá de la escala temporal del cálculo. Si uno quiere respuestas a corto plazo para las valoraciones relativas de diferentes trabajos, entonces el enfoque Kantorovich es pertinente. Para un tiempo amplio, en el que la escala temporal permite acelerar la formación de nuevo personal, entonces la primera alternativa sería más apropiada.

7. Conclusión

La escuela matemática soviética fundada por Kantorovich y la austríaca ejemplificada por Mises y Hayek tomaron posiciones radicalmente diferentes sobre la viabilidad del cálculo económico socialista. En gran medida, se ignoraron unos a otros. La escuela austríaca se concentró principalmente en criticar a economistas socialistas occidentales como Lange, y la escuela soviética parece haber ignorado completamente a Mises. Incluso cuando los participantes clave se reunieron, no surgió el tema. Menshikov escribió:

> *Es interesante que, en el relato de su viaje a Suecia para recibir el Premio Nobel, Kantorovich menciona una recepción informal con la participación de varios economistas norteamericanos*

premiados con el Nobel, incluyendo a Hayek, Leontief y Samuelson. Pero, al parecer, ni en esta recepción, ni durante otras reuniones, se llegó a plantear el tema. En enero de 1976, cuando trabajé en Estados Unidos como director de las Proyecciones de las Naciones Unidas, me pidieron que presentara a L. V. Kantorovich como nuevo Premio Nobel en la reunión anual de la Asociación Americana de Economía en Atlantic City. Por supuesto, puse el énfasis en el descubrimiento económico del laureado. En la discusión, nadie de la audiencia, que incluía T. Koopmans y L. Klein, futuro premio Nobel, mencionó la cuestión de la respuesta implícita de Kantorovich a parte de la argumentación de Hayek. [37]

Con la desaparición política de la URSS, la escuela austríaca ha tendido a asumir que los argumentos de Mises han salido victoriosos, pero en la teoría económica los argumentos no son resueltos definitivamente por la política. Las modas políticas cambian. El socialismo, que era políticamente impopular en Europa en la década de 1990, ha estado haciendo incursiones sustanciales en otro continente. No, uno tiene que usar argumentos económicos frente a frente, en sus mismos términos. Vale la pena prestar atención a Kantorovich, un participante ausente en el debate occidental sobre el cálculo socialista.

Referencias

[1] J. Appel, M. Baker, A.A. Deutschlands, and G.I. Kommunisten. Fundamental Principles of Communist Production and Distribution. Movement for Workers' Councils, von der Kollektivarbeit der Gruppe Internationaler Kommunisten - GIK [Allgemeine Arbeiter Union Deutschlands - AAUD], 1990 (1930).

[2] Aristotle. The Politics. Hutchinson, 1988.

[3] D. Bienstock. Potential function methods for approximately solving linear programming problems: theory and practice. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[4] M. L. Bierbrier. The Tomb-Builders of the Pharaohs. American Univ in Cairo Press, 1989.

[5] W. P. Cockshott and A. F. Cottrell. Information and economics: a critique of Hayek. Research in Political Economy, 18(1):177–202, 1997.

[6] W. P. Cockshott and A. F. Cottrell. Labour time versus alternative value bases: a research note. Cambridge Journal of Economics, 21:545–549, 1997.

[7] W. P. Cockshott and A. F. Cottrell. A note on the organic composition of capital and profit rates. Cambridge Journal of Economics, 27:749–754, 2003.

[8] W. P. Cockshott and A. F. Cottrell. The Scientific Status of the Labour Theory of Value. IWGVT conference at the Eastern Economic Association meeting, in April, 1997.

[9] W. P. Cockshott and A. F. Cottrell. Towards a New Socialism, volumen Nottingham. Bertrand Russell Press, 1992.

[10] W. P. Cockshott and A. F. Cottrell. Calculation complexity and planning: the socialist calculation debate once again. Review of Political Economy, 5(1):73–112, January 1993.

[11] G. B. Dantzig. Linear Programming. Operations Research, 50(1):42–47, 2002.

[12] G. B. Dantzig. Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, 1963.

[13] A. R. David. The Pyramid Builders of Ancient Egypt: a Modern Investigation of Pharaoh's Workforce. Routledge, 1996.

[14] R. Dawkins. The God Delusion. Houghton Mifflin Co., 2006.

[15] R. Dawkins et al. Unweaving the Rainbow: Science, Delusion and the Appetite for Wonder. Houghton Mifflin Company, 1998.

[16] H. D. Dickinson. Price Formation in a Socialist Community. The Economic Journal, 43(170):237–250, 1933.

[17] H. Dieterich. La democracia participativa: el socialismo del siglo XXI, País Vasco, Baigorri, 2002.

[18] M. Dupertuis and A. Sinha. A sraffian critique of the classical notion of center of gravitation. Technical report.

[19] E. Farjoun and M. Machover. Laws of Chaos, a Probabilistic Approach to Political Economy. Verso, London, 1983.

[20] J. Gondzio and A. Grothey. Massively parallel implementation of interior point methods for very large scale optimization. In R.Wyrzykowski, J. Dongarra, N. Meyer, and J. Wasniewski, editors, Parallel Processing and Applied Mathematics, Lecture Notes in Computer Science, 3911, Berlin, September 2006. Springer-Verlag.

[21] J. Gondzio and A. Grothey. Solving nonlinear financial planning problems with 109 decision variables on massively parallel architectures. In C. A. Brebia, editor, Computational Finance and its Applications II, WIT Transactions on Modelling and Simulation, volume 43. WIT Press, 2006.

[22] G. Grossman. Review: Against bourgeois economic pseudotheories of socialism. The American Economic Review, 53(1):211–213, 1963.

[23] K. E. Iverson. A programming language. Wiley, New York, 1966.

[24] K. E. Iverson. Notation as a tool of thought. In ACM Turing award lectures, page 1979. ACM, New

York, NY, USA, 2007.

[25] L. V. Kantorovich. Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. Management Science, 6(4):366–422, 1960.

[26] L. V. Kantorovich. The Best Use of Economic Resources. Harvard University Press, 1965.

[27] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. Combinatorica, 4(4):373–395, 1984.

[28] L. Khachian. A polynomial algorithm in linear programming. Soviet Mathematics Doklady, 20:191–194, 1979.

[29] V. Klee and G. Minty. How good is the simplex algorithm. In O. Shisha, editor, Inequalities-III, pages 159–175. Academic Press, 1972.

[30] H. D. Kurz and N. Salvadori. Von Neumann's growth model and the classical tradition. Understanding" classical" Economics: Studies in Long-Period Theory, 1998.

[31] O. Lange. On the Economic Theory of Socialism. University of Minnesota Press, 1938.

[32] B. Lumpkin. Geometry Activities from Many Cultures. Walch Publishing, 1997.

[33] K. Marx. Marginal Notes to the Programme of the German Workers' Party [Critique of the Gotha Programme]. Marx and Engels Selected Works, 3, 1970.

[34] K. Marx. The difference between the democritean and epicurean philosophy of nature. In Marx-Engels Collected Works Volume 1. Progress Publishers, 1841.

[35] K. Marx. Capital, volume 1. Progress Publishers, Moscow, 1954. Original English edition published in 1887.

[36] S. Meikle. Aristotle's Economic Thought. Oxford University Press, 1997.

[37] S. M. Menshikov. Topicality of Kantorovich's Economic Model. Journal of Mathematical Sciences, 133(4):1391–1397, 2006.

[38] G. Michaelson, W. P. Cockshott, and A. F. Cottrell. Testing marx: some new results from UK data. Capital and Class, pages 103–129, 1995.

[39] J. Neumann. A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies, 13(33):1–9, 1945.

[40] O. Neurath. Economic plan and calculation in kind. Otto Neurath: Economic Writings 1904-1945,

2004.

[41] O. Neurath. The Conceptual Structure of Economic Theory and its Foundations. In Thomas Uebel and Robert Cohen, editors, Economic Writings. Kluwer, (1917) 2004.

[42] O. Neurath. Economics in Kind, Calculation in Kind and their Relation to War Economics. In Thomas Uebel and Robert Cohen, editors, Economic Writings. Kluwer, (1919) 2004.

[43] A. Nove. The Economics of Feasible Socialism. George Allen and Unwin, London, 1983.

[44] J. O'Neill. Markets, Socialism, and Information: A Reformulation of a Marxian Objection to the Market. Social Philosophy and Policy, 6(2):200–210, 1989.

[45] A. Peters. Computersozialismus: Gespräche mit Konrad Zuse. Vaduz, 2000.

[46] A. Peters. Das Äquivalenzprinzip als Grundlage der Global Ökonomie. Akademische Verlagsanstalt, 1996.

[47] S. Pinker. The Language Instinct: How the Mind Creates Language. Harper Collins, 2000.

[48] R. Remak. Kann die Volkswirtschaftslehre eine exakte Wissenschaft werden. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 131:703–735, 1929.

[49] R. L. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman. A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems. Communications, 1978.

[50] L. D. Ryabev and Y. N. Smirnov. The Atomic Project, Science, and the Atomic Industry. Atomic Energy, 99(2):519–527, 2005.

[51] A. M. Shaikh. The empirical strength of the labour theory of value. In R. Bellofiore, editor, Marxian Economics: A Reappraisal, volume 2, pages 225–251. Macmillan, 1998.

[52] P. Sraffa. Production of commodities by means of commodities. Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[53] A. M. Turing. Computing Machinery and Intelligence. Mind, (49):433–460, 1950.

[54] A. M. Turing. Lecture on the Automatic Computing Engine, 1947. In B. J. Copeland, editor, The Essential Turing. OUP, 2004.

[55] A. M. Turing. On Computable Numbers, With an Application to the Entscheidungs problem. Proceedings of the London Mathematical Society, 42:230–65, 1937.

[56] T. Uebel. Incommensurability, Ecology,and Planning: Neurath in the Socialist Calculation Debate,

1919–1928. History of Political Economy, pages 309–342, 2005.

[57] C. J. Van Rijsbergen. The Geometry of Information Retrieval. Cambridge University Press, 2004.

[58] L. von Mises. Economic calculation in the socialist commonwealth. In F. A. Hayek, editor, Collectivist Economic Planning. Routledge and Kegan Paul, London, 1935.

[59] L. von Mises. Socialism: An Economic and Sociological Analysis. Johnathan Cape, 1951.

[60] L. von Mises. Human Action. Hodge and Company, London, 1949.

[61] J. von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Engl. transl. of the 1931 German edition by RT Beyer, 1955.

[62] D. Widdows. Geometry and Meaning. Number 172 in CSLI Lecture Notes. University of Chicago Press, 2004.

[63] D. Zachariah. Testing the labor theory of value in sweden. http://reality.gn.apc.org/econ/DZ_article1.pdf, 2004.

[64] D. Zachariah. Labour value and equalisation of profit rates. Indian Development Review, 4(1):1–21, 2006.