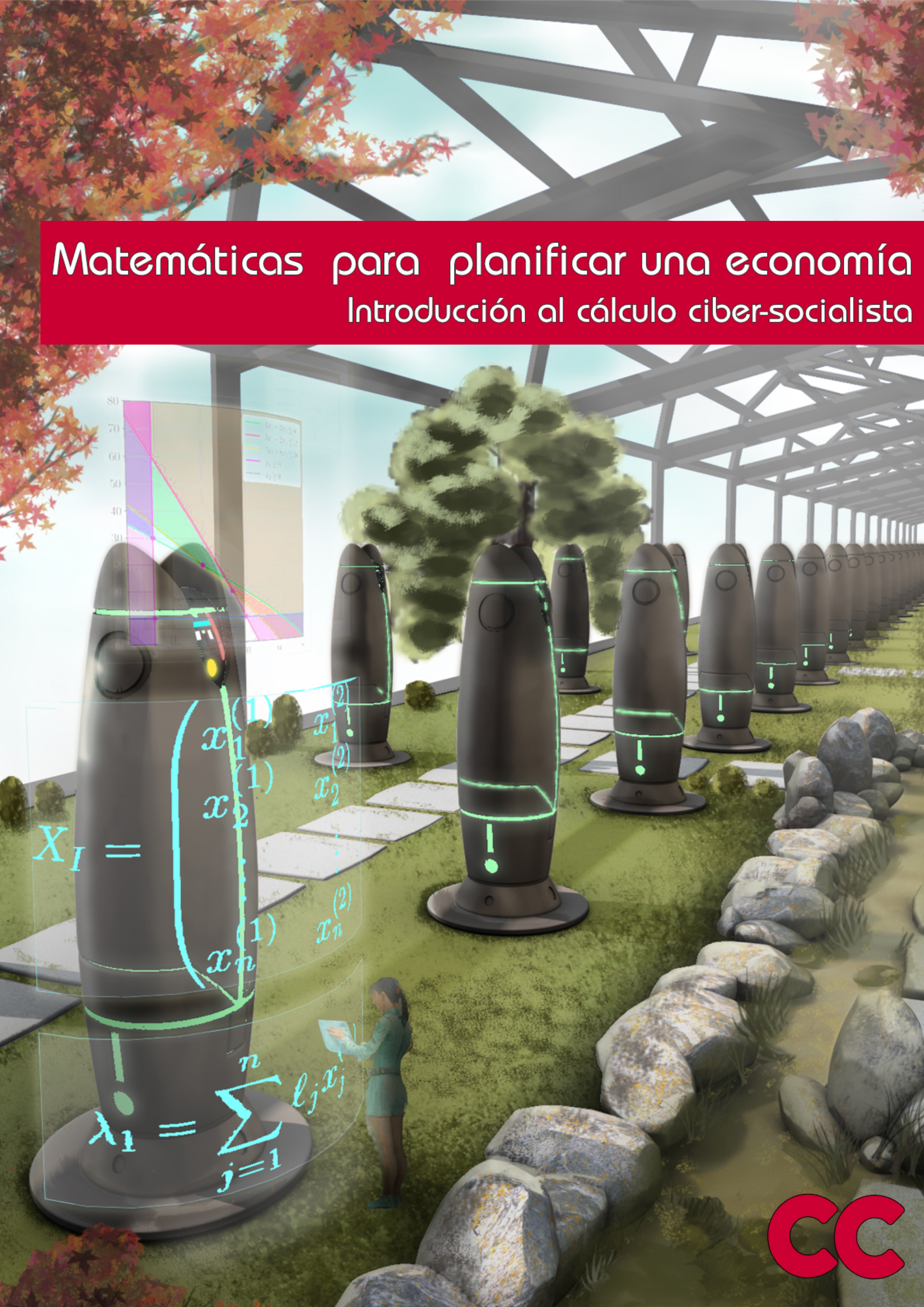
Matemáticas para planificar una economía

Introducción al cálculo ciber-socialista



Título: Matemáticas para planificar una economía

Subtítulo: Introducción al cálculo ciber-socialista

Primera edición: 2022

Versión: 1.1 (maquetada para impresión)

Publicado y distribuido por CibCom

www.cibcom.org

cibcomorg@gmail.com

Índice general

El propósito de esta guía es ayudar a todos los interesados a comprender los aspectos más técnicos del emergente comunismo cibernético. Sobre este, hasta ahora, hay escritos muy introductorios y otros muy avanzados,[1] brillando por su ausencia los “puentes” entre unos y otros. Desde CibCom pretendemos trascender esta situación; queremos servir de bastón en esa iniciativa tan resbaladiza que es adentrase en cuestiones matemáticas o informáticas sin haberse especializado nunca en ello o no habiéndolas trabajado en un tiempo. El público en general podrá consultar el documento cuando encuentre dificultades en interpretar una idea o expresión algebraica en alguno de aquellos textos. Este ha quedado especialmente extenso porque no hemos querido saltarnos ninguna de las explicaciones que se suelen dar por supuestas en los tratados sobre este tema.

En cualquier caso, antes de adentrarnos en lo que hoy nos trae, conviene recordar el contexto que, desde hace casi tres siglos, da razón de ser a estas investigaciones.

1 Introducción

La planificación socialista de la economía –el buque insignia del ciber-comunismo– es una de las maneras de organizar y coordinar la producción en las sociedades modernas, caracterizadas por una división técnica del trabajo muy desarrollada. Ante ella, se alza, antagónicamente, la economía de mercado hoy imperante, la cual produce y reproduce en el mundo una realidad históricamente singular.

En la sociedad capitalista, caracterizada por la propiedad privada de los medios de producción, la coordinación consciente de la economía es inexistente y la organización se da a nivel atómico (en las empresas). La “planificación capitalista”, pese a lo mucho que se ha tecnificado en las ultimas décadas, se da solo en el interior de cada empresa y, lo que es más importante, está fundamentalmente orientada a las expectativas de ganancia. En el plano inter-empresarial, en la relación entre distintas empresas privadas, ya no es que no haya una armoniosa planificación, es que no hay planificación alguna.[2] Sólo a posteriori, y según la lógica del automatismo ciego e impersonal del mercado, se consiguen coordinar las distintas unidades productivas para suplir las demandas

[1] Véase la riquísima literatura que suponen las obras originales de Otto Neurath, Wassily Leontief, Leonid Kantoróvich, Oskar Lange, Víktor Glushkov, Nikolay Veduta, Stafford Beer, Paul Cockshott y Allin Cottrell, Jan Philipp Dapprich, Spyridon Samothrakis, Tomas Härdin, etc.

[2] Los defensores más acérrimos del capitalismo, los economistas austriacos, haciendo gala de un palpable hombre de paja, directamente niegan *la posibilidad* misma de una coordinación consciente a nivel social. Desde sus parámetros, planificar (o resolver el problema de asignación en una economía socializada) implicaría, necesariamente, dejar en manos de una única autoridad el papel de tomar todas las decisiones económicas. Para ello, ésta tendría que ser omnisciente; es decir, tener acceso hasta la información económica más detallada y saber el mejor uso para todos y cada uno de los millones de recursos de la economía. Ante la evidente imposibilidad de dicha autoridad, los austríacos propondrían como única solución eficiente al problema asignativo el mecanismo descentralizado del mercado [1].

de las personas. Estas demandas (que en ocasiones son las necesidades humanas más básicas) serán satisfechas, o no, exclusivamente en función del nivel de ingreso de cada cual y de la disponibilidad de mercancías que nuestro espacio nacional tenga en la cadena global de aprovisionamiento.

	Mercado Capitalista	**Planificación Socialista**
Coordinación	Automática, vía competencia	Consciente, a través de instituciones políticas
Cálculo económico	Monetario	En especie
Objetivo	Rentabilidad privada	Necesidades sociales
Restricciones climáticas	Introducidas desde fuera disrumpiendo el funcionamiento (externalidades negativas)	Aplicadas orgánicamente en el propio proceso planificador
Empleo	Según las necesidades del capital (desempleo estructural)	Según la voluntad individual y las necesidades sociales
Forma política	Parlamentarismo o Dictadura militar / Estado burocrático encargado de asegurar la acumulación de capital	Democracia Directa / Comuna

Cuadro 1: Tabla comparativa entre sistemas.

Lo que los apologetas del capitalismo nos venden como una organización racional de la producción, se revela radicalmente problemática debido a sus dinámicas intrínsecas, con resultados desastrosos tanto para la humanidad como para el medio ambiente. Muchos de los rasgos de nuestra realidad económica, como la extrema desigualdad de ingresos y las recesiones, son consecuencias necesarias de las relaciones sociales de producción y, por lo tanto, propiedades duraderas y esenciales del capitalismo, más que accidentales o transitorias. Pese a los pronósticos de los defensores del mercado, todo esto sigue ocurriendo, con los inmensos dramas humanos que conllevan.

Estas dinámicas son fuente de innumerables conflictos políticos. La polarización permea nuestras sociedades y se ve agudizada con cada nueva crisis. La incapacidad de ejercer un control social sobre la actividad económica atomizada se plasma en la absoluta postración de las «democracias liberales» ante los designios y necesidades del

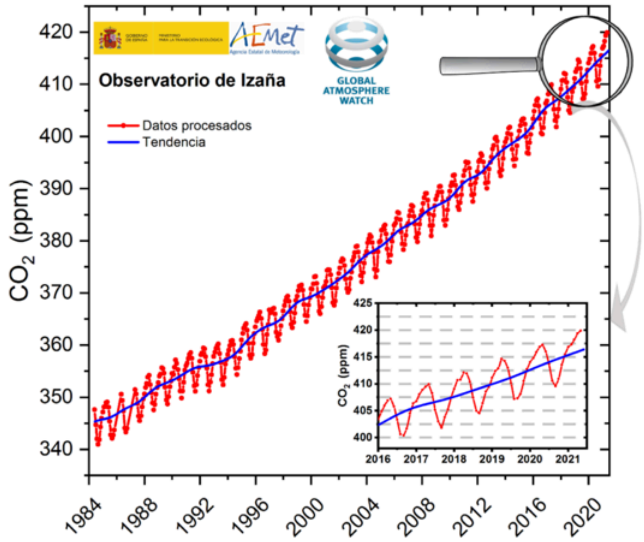


Figura 1: Promedios mensuales de concentración de CO_2 (en ppm) (puntos rojos) junto con la tendencia de CO_2 (línea azul)[3].

capital. Todas ellas son de por sí razones suficientes para indagar en la posibilidad de una alternativa organizativa consciente y democrática. Sin embargo, detrás de todas ellas se alza, con aún más urgencia, evitar que el capitalismo deteriore la capacidad del planeta de sostener la vida.

A pesar de que nuestro planeta tiene dinámicas que permiten la renovación de recursos imprescindibles para el sostén de cualquier forma de vida, la producción de mercancías rebasa constantemente sus limites biofísicos. A la larga, este sistema constituye un peligro para prolongar la vida humana. El cambio climático y la limitación de los recursos apenas están empezando a manifestarse. Nuestra situación actual no es más que la antesala de lo que viene: primeras crisis de escasez, dificultades importantes para la agricultura en varias zonas del planeta, emisiones cada vez mayores de gases de efecto invernadero, aridificación de regiones enteras, inundación de otras, etc. [2]. A esto se suma el colosal derroche de recursos que se produce cada año por la porción de bienes que no consiguen intercambiarse. Esto va a suponer el mayor reto global al que la humanidad se ha enfrentado en su corta pero frenética historia. Un reto que el propio mercado ha generado y del que difícilmente nos salvará. Su imperiosa necesidad de crecimiento hace que el capitalismo sea incapaz de enfrentarlo. Su comportamiento se revela, a la luz de este nuevo peligro, aún más irracional y nocivo.

Pese a la evidencia, economistas, políticos, intelectuales, socialdemócratas, liberales y otras tendencias políticas llevan años intentando buscar soluciones que, de alguna manera, eliminen mágicamente los efectos “negativos” del mercado sin cambiar lo que consideran el mayor éxito del capitalismo, la acumulación; esto es, sin alterar su naturaleza. Así evitan tener que pensar y aceptar las dificultades de transformar la base económica de la sociedad. Sin embargo, no parece que estén logrado resolver ninguno de estos problemas: los momentáneos avances del movimiento obrero están en pleno repliegue con la desarticulación del llamado "estado de bienestar", el desempleo persiste y las crisis sociales siguen al orden del día, la contaminación no para de agravarse y la transición energética no avanza como está previsto, la acumulación capitalista sufre repetidas limitaciones y el descontento alienta a fuerzas políticas que erosionan las instituciones fundamentales para sostener la reproducción del capital.

Nosotros planteamos abordar el problema de raíz: proponemos la alternativa de una planificación democrática, consciente y racional de la economía, para poder afrontar estos y más retos, pero también para poder elegir libremente nuestro destino como sociedad. ¿Es acaso esta una quimera utópica como se nos vende a diario desde los grandes medios capitalistas? ¿No se ha probado acaso esta antes, con un resultado desastroso? La planificación no es una idea novísima de estas últimas décadas. El movimiento obrero ha considerado la opción de una economía planificada opuesta al desorden capitalista desde el siglo XIX. Se pueden rastrear estas ideas a través de las diferentes expresiones organizativas y políticas de nuestra clase, especialmente en las Internacionales I, II y III. El triunfo de la Revolución de Octubre permitió que, desde finales de la segunda década del siglo XX, se llevara a cabo la aproximación más ambiciosa de la historia a la planificación económica en la Unión Soviética.

Después de enfrentarse a la contrarrevolución armada en una sangrienta y destructiva guerra civil de 6 años, la economía soviética se encontraba en condiciones absolutamente precarias. Tras un corto periodo de Nueva Política Económica con elementos capitalistas, el contexto de aislamiento internacional y la necesidad de un rápido desarrollo industrial llevaron a los soviéticos a tratar de organizar racionalmente una economía nacional enfocada en el autoabastecimiento. Este reto era inmenso: se trataba de una gigantesca extensión territorial donde sólo se había implantado parcialmente el capitalismo, con relaciones sociales más propias del feudalismo [4]. En el primer plan quinquenal de 1928, se trataba de transformar una economía predominantemente agraria a una con una fuerte base de industria pesada. En esa etapa, la sociedad soviética vivió un rápido crecimiento de la riqueza: "el ingreso nacional soviético a precios constantes de 1928 creció más de un 60%" entre 1928 y 1933 [4]. La planificación económica consiguió ubicar a la URSS como una potencia mundial pese a su evidente retraso inicial y el tener que repeler, simultáneamente, a los nazis en lo que fue una de las invasiones más destructivas que se recuerdan.

No obstante, tras los significativos logros de esa primera fase de planificación, pronto aparecerían problemas en la organización de una economía cada vez más diversa y compleja. Problemas como el desabastecimiento y el desfase en las cadenas productivas que la URSS acarrearía hasta su desmantelamiento en los años 90. Estos se deben, en parte, a los deficientes métodos de planificación adoptados por aquel entonces ante la falta de capacidad computacional. A modo de resumen, podemos decir que, al no tener la capacidad de tratar eficientemente la información económica mediante el cálculo electrónico, el sistema soviético adoleció de los siguientes tres problemas:

1. Debido a que el órgano de planificación no podía calcular cuánto trabajo directo e indirecto costaba producir cada bien, los precios de estos terminaban fijándose en base a criterios subjetivos ("lo más básico", más barato, "lo más superfluo", más caro, etc) [5, 6]. Así, bienes relativamente difíciles de producir se vendían a precios bastante inferiores a su coste, dando lugar a desabastecimientos del lado de los consumidores y a desajustes en la contabilidad estatal. Este punto es tratado en mayor detalle en el Apéndice A.

2. La planificación no partía de la demanda real de la sociedad, sino que se establecían objetivos de producción en bruto (toneladas de carbón, hierro etc.). En otras palabras, no se consideraban los productos finalizados que la población consumía para determinar las cantidades requeridas de materias primas, sino que se estimaba una cantidad base de estas ultimas para gradualmente ir produciendo distintos bienes hasta que estos llegaran, según era posible, a manos de la gente. Esto dio lugar a un gran desperdicio de recursos humanos y materiales que a la larga lastraron a los soviéticos.

3. Como consecuencia de lo anterior, se conservó el uso de dinero como unidad de cálculo y método de pago. Esto es problemático no solo porque, tal y como demuestran [7], [8] y [9], este engendre altas desigualdades de forma espontánea y, por tanto, conflictos políticos incompatibles con la democracia real que anhelamos, sino por una cuestión más profunda. ¿Qué información aportan las expresiones monetarias o los precios de mercado? Siendo generosos, la cantidad relativa de trabajo socialmente necesaria para producir un bien y su escasez relativa [10]. Cuestiones como cuán contaminante es la producción de un bien, lo mucho que tardan los ecosistemas en regenerar una materia bruta o el sufrimiento que produce en los trabajadores, son metidos dentro del cajón de sastre de las "externalidades negativas", incurriendo en una sistemática pérdida de información que perjudica la operatividad del sistema.

Ante el progresivo desgaste de estas insuficiencias de la planificación no informatizada, la restauración del sistema mercantil se fue abriendo paso en la URSS a través de diferentes enmiendas. Desde la "reforma Kosygin" hasta la culminación de dicho proceso bajo la Perestroika, se fueron revirtiendo los logros alcanzados por el socialismo soviético hasta desembocar en su destrucción y posterior suplantación por la barbarie nacionalista y neoliberal que hoy domina en las actuales repúblicas ex-soviéticas.

La coyuntura actual es bien distinta. Las innovaciones tecnológicas de las últimas décadas, junto con el estudio de los problemas de la planificación en los países socialistas, ha posibilitado una teorización de la planificación sin precedentes. La democracia directa y el *cálculo en especie* emergen como pilares fundamentales: en lugar de reducir la racionalidad económica a una variable unidimensional como la rentabilidad monetaria, la contabilidad en unidades físicas, integrada en algún sistema de deliberación pública, permite asumir orgánicamente criterios multidimensionales tales como las recomendaciones científicas (ecología, salud publica, etc.) y los valores ético-políticos (dignidad laboral, justicia intergeneracional, solidaridad internacional, etc.) [11, 12]. Como decíamos al principio, con el propósito de ayudar a comprender estas nuevas técnicas de coordinación, este documento pretende ser una introducción a la expresión formal de las mismas.

En particular, este artículo abordará tres temas principales: cálculo matricial, optimización y complejidad computacional. Cada uno de estos temas pretende responder, respectivamente, a problemas de *logística* (cómo garantizar que se produce exactamente lo que se demanda), *desarrollo* (cómo actualizar nuestra producción en relación a situaciones sociales y tecnológicas cambiantes) y *viabilidad* (cómo estar seguros de que los cálculos se realizan en un tiempo razonable y con la suficiente aproximación).

Cabe aclarar que al ceñirnos al ámbito "técnico" de la planificación – es decir, matemáticas y computación – estamos omitiendo intencionalmente todas los requisitos jurídico-políticos igualmente necesarios para la organización consciente y democrática de la producción de los bienes y servicios. Todo lo que tiene que ver con esto se trata y se seguirá tratando en futuros artículos.

¡A planear!

2 Cálculo matricial

Probablemente el lector se haya preguntado más de una vez qué procesos productivos ha de recorrer un producto, por ejemplo un móvil, hasta llegar a nuestra casa o tienda en estado funcional. Como podrá intuir, es un proceso tremendamente complejo, su fabricación incluye desde la generación de energía y la extracción de minerales, hasta la fabricación de los semiconductores y de los plásticos utilizados, entre otras muchas cosas.

El mercado no coordina de manera directa todos estos procesos como un todo, sin embargo, a pesar de su atomicidad, es capaz de vincular las diferentes unidades productivas a nivel mundial para satisfacer una demanda efectiva. Los mecanismos básicos a través de los cuales se regula su metabolismo social son: 1) la disciplina ejercida por la competencia entre empresas y 2) el sistema de precios y los flujos de dinero. Estos y la retroalimentación que generan dan como resultado una red de señales y flujos de información que es capaz de incorporar de forma indirecta los costes materiales sociales en los costes monetarios de las mercancías.

Nuestra propuesta pretende superar estos mecanismos y ser tanto o más efectiva en organizar el proceso productivo. Situémonos por un momento en el lugar del comité de planificación designado para coordinar el conjunto de la economía, dentro de los parámetros que la ciudadanía haya decidido. ¿Cómo hacen estos funcionarios públicos para organizar de manera correcta la distribución y producción de los recursos? ¿Cómo pueden resolver *problemas logísticos de abastecimiento e inventario*, de tal manera que no se genere escasez, en ausencia de competencia? Para ello, es necesario ser capaces de captar y tratar de manera científica las relaciones entre las diferentes unidades productivas. Consecuentemente, como mínimo, ha de poder computar los costes sociales de producción de cada tipo de bien de forma directa, precisa y no como resultado de leyes que escapan al control consciente de los seres humanos. Pues bien, para conseguir esto y capturar el metabolismo social hoy es posible usar lo que se denomina "matriz tecnológica". Gracias a esta podremos saber, de forma mucho más rigurosa que en tiempos de la URSS, la tasación adecuada para cada bien, así como la cantidad de recursos que se necesitan a lo largo de su proceso productivo. Pero para poderla definir primero tenemos que exponer el concepto de matriz y sus propiedades.

2.1 ¿Qué son las matrices y qué podemos hacer con ellas?

Una matriz no es ni más ni menos que un arreglo bidimensional de números, es decir, un conjunto de números ordenados por filas y columnas. Formalmente, una matriz A con n filas y m columnas se define como

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

o de manera abreviada $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots n, j=1,\dots m}$; notar que $a_{i,j}$ simplemente es el número que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima. Diremos en este caso que A es una matriz $n \times m$.

Para conocer la posición de cualquier elemento de una tabla se ha de saber únicamente su fila y columna. En sí, esa matriz no significa nada, pero eso no quita que podamos darle un sentido. Una matriz con única fila y columna la podemos entender como un número. Por otro lado, para definir un punto geográfico en el globo terrestre no nos basta con un único número, necesitamos al menos dos (latitud y longitud), que podría ser representado por una matriz con una fila y dos columnas o con dos filas y una columna. Otro ejemplo de utilización de matrices, pero con más filas y columnas que antes, sería la información de un catálogo con 20 modelos de coches clasificados por 5 características diferentes: peso, altura, potencia, número de puertas y precio. Ésta se puede condensar en una matriz con 20 filas y 5 columnas o con 5 filas y 20 columnas, dependiendo de la elección del lector, no hay ninguna razón matemática para elegir una de las dos opciones, no obstante, la primera opción es lo que sería más común para un catálogo.

Un tipo muy especial de matrices muy utilizadas en nuestro día a día son las matrices de una sola fila y dos columnas, ya que, como hemos dicho, pueden representar puntos en un plano. Por ejemplo, $\mathbf{p} = [1, 2]$ sería, ajustado a una unidad de distancia, el punto del plano cuya latitud es 1 y cuya longitud es 2. Así, los puntos podrían representarse en un mapa. En general, las matrices fila son matrices con una sola fila y las matrices columna son matrices con una sola columna, estos tipos de matrices se denominan *vectores fila* y *columna* respectivamente. Otro tipo de matrices peculiares son las que tienen el mismo número de filas y columnas, éstas se denominan matrices cuadradas, y tienen propiedades matemáticas especialmente importantes.

Ahora que sabemos qué es una matriz, veamos en qué operaciones pueden estar involucradas.

2.1.1 Suma de matrices

La primera operación que a uno se le puede ocurrir es la de sumar matrices. ¿Cómo podríamos definir esta operación? Primero notamos que sumar matrices con diferente número de filas o de columnas no parece muy significativo, ¿que significaría sumar número (escalar) con un vector fila? La definición a continuación de suma de matrices requiere que ambas matrices involucradas tengan exactamente el mismo número de filas y de columnas. Formalmente, sean A y B matrices de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \dots & b_{n,m} \end{bmatrix},$$

entonces definimos la matriz suma de A y B como

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} & \dots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} & \dots & a_{2,m} + b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & a_{n,3} + b_{n,3} & \dots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{bmatrix},$$

es decir, la matriz suma es la matriz cuyo elemento en la fila i-ésima y columna j-ésima es la suma de los respectivos elementos de A y B que ocupen dicha posición. Ningún misterio en esto, sumar matrices es simplemente escribir la matriz cuyos elementos son las sumas “celda” a “celda”[3] de las matrices involucradas. Nótese que $A + B = B + A$, es decir, la suma de matrices es una operación conmutativa. De manera análoga podemos definir la resta de matrices:

$$A - B := \begin{bmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & a_{1,3} - b_{1,3} & \dots & a_{1,m} - b_{1,m} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & a_{2,3} - b_{2,3} & \dots & a_{2,m} - b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} - b_{n,1} & a_{n,2} - b_{n,2} & a_{n,3} - b_{n,3} & \dots & a_{n,m} - b_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Un ejemplo concreto de esta operación sería

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3.1 & 9 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 4 & 3 \\ 0.1 & -11 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 6 \\ 3.2 & -2 & 35 \end{bmatrix}.$$

[3] A veces, se refiere a las matrices como *tablas* cuyos elementos se encuentran dentro de *celdas*. Estos tecnicismos son especialmente comunes en los campos relacionados con la informática.

2.1.2 Producto de matriz por un escalar

Sea w un número real cualquiera entonces definimos el producto de un número por una matriz de la siguiente manera:

$$wA = Aw := \begin{bmatrix} wa_{1,1} & wa_{1,2} & wa_{1,3} & \dots & wa_{1,m} \\ wa_{2,1} & wa_{2,2} & wa_{2,3} & \dots & wa_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ wa_{n,1} & wa_{n,2} & wa_{n,3} & \dots & wa_{n,m} \end{bmatrix},$$

es decir, se multiplica el contenido de cada celda por el escalar w. Podríamos decir que, al multiplicar la matriz por un escalar, que no es más que un número constante (e.g., $w = 4$), estamos literalmente "escalando" la matriz completa por dicho número, de ahí el nombre. Obsérvese que como el producto de dos números reales es conmutativo, la multiplicación escalar de una matriz también lo es.

2.1.3 Producto de matrices

La siguiente operación entre matrices en la que se puede pensar es la multiplicación o producto de matrices. La suma de matrices y la multiplicación escalar se definieron de una forma "celda" por "celda", sin embargo, este NO es el caso para la multiplicación de matrices.[4] La razón por la que la definición estándar de la multiplicación de matrices no sigue esta regla puede no ser obvia al principio, sin embargo, es la más útil debido a su íntima relación con las ecuaciones lineales y los mapeos.

Recordemos que estamos definiendo operaciones entre matrices, garantizando que estas estén bien definidas, todo es válido como definición, otra cosa es que nos sean útiles. Para un matemático no tiene sentido cuestionar las definiciones en sí, éstas no se demuestran, solamente su consistencia y sus propiedades. Antes de definir en general el producto de matrices, definámoslo para casos particulares. Definamos el producto de una matriz A con n filas y m columnas por una matriz columna (vector columna) $\mathbf{x}$ con m filas:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + a_{j,3}x_3 + \dots + a_{j,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,m}x_m \end{bmatrix}.$$

[4] Aunque, existe una definición de producto que se funciona de manera similar a la suma llamado el producto de Hamadard que es útil en el algoritmo JPEG.

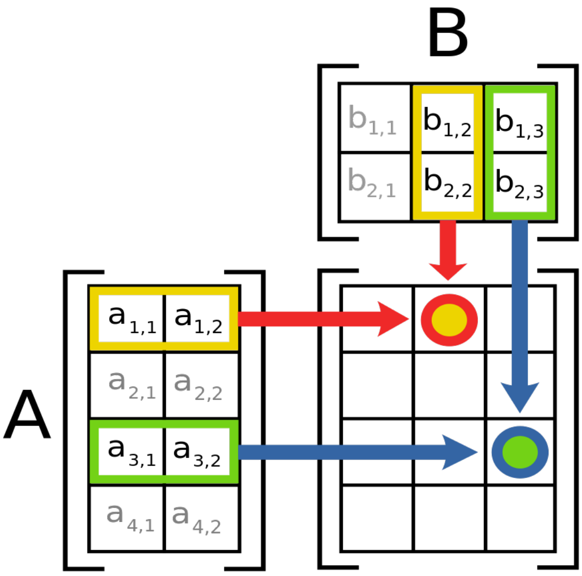


Figura 2: Ilustración gráfica del producto de matrices.

¡Que no se asuste el lector! La regla es muy sencilla: 1) tomar la primera fila de la matriz y multiplicarla por el vector elemento a elemento y sumar el resultado 2) colocar el resultado en la primera fila del vector columna resultante 3) repetir la operación con las siguientes filas de la matriz (pero colocando el resultado de 1) en la fila correspondiente del vector columna resultante).

Un ejemplo concreto de producto matriz por vector sería

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.40 \\ 0.50 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 2 + 0.40 \cdot 3 \\ 0.50 \cdot 2 + 0.25 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.75 \end{bmatrix} .$$

De una matriz con n filas y m columnas y un vector columna (con exactamente m filas) obtenemos un vector columna con n filas.

Procedemos a definir la multiplicación de matrices en general, de la cual la multiplicación matriz-vector es un caso particular. Sean A una matriz con n filas y m columnas y B una matriz con m filas y p columnas. Si escribimos

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,p} \end{bmatrix},$$

entonces definimos la multiplicación de A por B como la matriz de n filas y p columnas siguiente

$$AB := \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,p} \end{bmatrix},$$

donde $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j} + \dots + a_{i,m}b_{m,j}$ para todo $i = 1,..,n$ y $j = 1,\dots,p$, es decir, el elemento que ocupa la fila i-ésima y columna j-ésima de la matriz producto es la suma de las multiplicaciones elemento a elemento de la fila i-ésima de A por la fila j-ésima de B. Notamos que 1) para que esta definición tenga sentido el número de columnas que ha de tener A y el número de filas que ha de tener B han de coincidir y 2) la matriz resultante tiene las mismas filas que A y el mismo número de columnas que B. Consecuentemente, si el número de filas de A no coincide con el número de columnas de B entonces BA no está bien definido, por tanto la propiedad conmutativa no es cierta en general. Sin embargo, cabría preguntarse en caso de que A tuviera n filas y n columnas y B también ¿$AB = BA$? La respuesta, al contrario que con la suma de matrices, es negativa, en general, el producto de matrices no conmuta. Veamos un par de ejemplos sencillos de este fenómeno. El primero:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + (-3)\cdot 3 & 2\cdot 10 + (-3)\cdot(-1) \\ 7\cdot 0 + 5\cdot 3 & 7\cdot 10 + 5\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 23 \\ 15 & 65 \end{bmatrix},$$

mientras que

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 + 10\cdot 7 & 0\cdot(-3) + 10\cdot 5 \\ 3\cdot 2 + (-1)\cdot 7 & 3\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 50 \\ -1 & -14 \end{bmatrix}.$$

El segundo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mientras que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Matriz identidad y matriz inversa

Definimos la matriz identidad de dimensión n como

$$I_n := \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ columnas}},$$

es decir, la matriz cuadrada cuyos elementos diagonales (aquellos que ocupan la misma fila que columna, es decir, los elementos de la forma $a_{i,i}$) son unos y que tiene el resto de entradas nulas. Notar que una matriz identidad I [5] verifica que $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo vector columna $\mathbf{x}$, de ahí su nombre.

Diremos que C es matriz inversa de A si verifica

$$AC = CA = I\ . \tag{1}$$

A continuación veremos que a lo sumo existe una única matriz inversa, así quedará justificado llamar a la matriz A^{-1} que verifique

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

matriz inversa de A. En efecto, si C_1 y C_2 verifican (1) entonces

$$C_1 = C_1 I = C_1(AC_2) = (C_1 A)C_2 = IC_2 = C_2\ ,$$

donde hemos tenido en cuenta que $F(GH) = (FG)H$ para cualquiera F, G, H matrices cuadradas.[6] Se puede probar que si existe A^{-1} entonces A es una matriz cuadrada. En caso de que existan A^{-1}, B^{-1} se tiene que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.[7]

[5] Con I nos referiremos a una matriz identidad cualquiera.

[6] Esta propiedad se llama asociatividad y habría que probarla. La prueba es farragosa pero sencilla. Una manera alternativa sería utilizar que una matriz representa una función lineal, que el producto de matrices representa la composición de las funciones lineales correspondientes y que la composición de funciones cumple de manera trivial la asociatividad [13, Capítulo 9].

[7] En [14] se puede consultar un algoritmo elemental para calcular la matriz inversa de A (en caso de existir) usando el método de eliminación de Gauss usado para resolver sistemas de ecuaciones lineales y que en la Sección 4 se explica y comprueba su complejidad computacional.

2.1.5 Matriz transpuesta

Dada una matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

definimos la matriz *traspuesta* de A como

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \ldots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \ldots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

es decir, A^T es la matriz A "cambiando las filas por las columnas". Es evidente que $(A^T)^T = A$. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o si

$$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_m],$$

entonces

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

2.1.6 Relación entre las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales y las matrices inversas

Antes de concluir esta sección vamos a ver la relación que existe entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales con solución única.[8] Empecemos con un ejemplo particular sencillo. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{2}$$

[8] Lo que se conoce como sistema de ecuación lineal compatible determinado.

¿Cómo podríamos expresar estas relaciones de manera matricial? Podemos expresar (2) de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, si consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, es decir, la matriz cuyas filas son los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales y $\mathbf{c} = [1, 1]^T$ resulta que (2) se puede representar como

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{c} \, .$$

Procedemos a resolver (2). Sumando la primera ecuación con la segunda de (2) obtenemos $2x = 2$ y por tanto, $x = 1$ e $y = 0$. Por otro lado, aplicando el método descrito en [14] o en la Sección 4.3 obtenemos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$. Resulta que $A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es la solución previamente obtenida.[9] Veamos a continuación el caso general del fenómeno que acaba de ocurrir. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $x_1, \ldots, x_m$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = y_n \end{cases} \tag{3}$$

con $a_{i,j}, y_i$ dados para todo $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$. Resulta que (3) equivale a resolver el problema de encontrar el vector columna x tal que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \, , \tag{4}$$

con $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}$ e $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T$.

Nótese que si A^{-1} existe, multiplicando por la izquierda a ambos lados de (4) se obtiene que $A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ y por lo tanto $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ es la solución de (3).

Este método de resolución de sistemas puede parecer demasiado complicado o engorroso de usar sobre el método estándar, simbólico y manual al principio, pero es

[9] El lector más escéptico puede comprobar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

interesante destacar que al cambiar los valores de $y_1, \ldots, y_n$ en (3), no hay que volver a resolver el nuevo problema desde cero, ya que se puede aprovechar que A^{-1} ya está calculado y sólo habría que hacer un único producto. Así que si tuviera que resolver múltiples sistemas con los mismos coeficientes, probablemente ahorraría tiempo utilizando el segundo método.

Otra razón de para utilizar el segundo método es que se obtienen las soluciones (o su ausencia) en un número finito de operaciones aritméticas básicas entre los coeficientes $a_{i,j}$ y los términos independientes $y_1, \ldots, y_n$ de cualquier sistema de ecuaciones lineales. Los ordenadores no son capaces de resolver ecuaciones en modo simbólico como lo hacemos nosotros, pero son capaces de almacenar matrices y vectores y realizar operaciones sobre ellos de forma *muy* eficiente.[10]

Ahora que entendemos un poco las operaciones con matrices, estamos preparados para echar un vistazo a algunas de las importantes aplicaciones que las matrices (y el álgebra lineal en su conjunto) tienen en el campo de la ciencia económica y, en particular, a la planificación económica.

2.2 ¿Por qué es importante para nuestra propuesta?

Como hemos discutido previamente, el sistema empleado por la URSS tenía al menos dos problemas importantes e inevitables. La incapacidad de dar respuesta a estos problemas generaron un descrédito de la economía planificada que sirvió en gran parte como "abono" para los que defendían la incorporación de reformas orientadas hacia el capitalismo, que sólo agravaron los problemas y empeoraron la calidad de vida de las personas. Nosotros vamos a intentar ilustrar cómo las matemáticas modernas y, en particular, el cálculo matricial, dan una respuesta a ambos problemas descritos y cómo sirven de base para una economía planificada. En este artículo nuestra pretensión no es tratar la planificación socialista en toda su complejidad, con toda clase de matices, sino solamente ilustrar las matemáticas básicas que forman parte de la solución a los problemas mencionados y que conforman la base para posteriores investigaciones sobre la misma.

En esta sección vamos a trabajar bajo ciertos supuestos, que a continuación comentaremos, con tal de simplificar el tratamiento matemático. Somos conscientes que una economía real requiere tener en cuenta muchos más matices, pero como hemos mencionado, lo que más nos interesa en el momento presente es ilustrar las herramientas matemáticas básicas necesarias para la planificación de una economía moderna. No obstante, daremos algunas referencias y observaciones sobre el tratamiento de los ca-

[10] Véase BLAS.

sos más generales.

El método que vamos a describir a continuación está inspirado y generaliza los análisis realizados por W. Leontief, por los cuales le otorgaron en 1973 el Premio de Ciencias Económicas del Banco de Suecia en Memoria de Alfred Nobel (en sueco, *Sveriges riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne*). Su método de análisis de la economía, a su vez inspirado en François Quesnay, León Walras, Karl Marx y la planificación soviética, se denomina "método de insumo-producto", sucintamente consiste en utilizar álgebra matricial para describir las relaciones intersectoriales de una economía en equilibrio general.[11] [12] El lector interesado en los trabajos donde Leontief describe y utiliza su potente método puede consultar [15], [16] y [17].

Supongamos una economía cerrada (es decir, sin flujos con ningún agente externo) con m tipos de artículos distintos, siendo los primeros n tipos de artículos bienes de producción (madera, acero, maquinaria industrial,...etc) y los restantes $m - n$ tipos de artículos bienes de consumo (batido de chocolate, medicamentos, vendas,...etc).[13] Además, vamos a suponer que

(a) Cada sector produce solamente un tipo de bien, por tanto no hay productos intermedios intrasectoriales.[14]

(b) No hay formación o educación que los trabajadores puedan adquirir, ya sea para hacer ciertos trabajos que de otra manera no podrían realizar o para maximizar su productividad.[15]

(c) Todos los bienes de producción tienen el mismo lapso de duración, que es tomado como unitario. El desgaste de la maquinaria pesada, infraestructura de las fábricas ... etc no se tendrá en cuenta.[16]

(d) Todos los tipos de bienes requieren el mismo tiempo de fabricación, que es tomado como unidad de tiempo.[17]

(e) No hay diferentes técnicas de producción disponibles para cada tipo de bien.

---

[11] La noción de equilibrio general quiere decir, informalmente, que la oferta y la demanda de todos los tipos de artículos coincide.

[12] Es interesante notar que W. Leontief trabajaba con precios de mercado, no con categorías más profundas que son independientes de la esfera de la circulación, como haremos nosotros a continuación.

[13] Los bienes de consumo son aquellos que no se usan para producir otros bienes.

[14] Esta suposición no es difícil de subsanar, por ejemplo, el lector puede consultar [18].

[15] El lector interesado en tratar este aspecto puede consultar [19, Capítulo 2].

[16] El lector interesado puede leer [20] para más información a este respecto. En [19] el desgaste (desigual) de las maquinarias se tiene en cuenta, no supone una gran dificultad.

[17] Se puede consultar [21], donde se trata brevemente. Posteriores análisis sobre este punto serán necesarios pues es una variable importante más allá de los "costes laborales integrados" y consideraciones medioambientales, que apenas ha sido tratado.

Si bien todos los demás supuestos tienen solución, el último es especialmente problemático. Basta con haber visto Breaking Bad para saber que se puede producir un cierto producto de diferentes maneras. Todas estas técnicas alternativas pueden compararse en términos de eficiencia atendiendo a los costes laborales integrados (que definiremos a continuación)[18] y a las cantidades de cada tipo de artículo que se desea obtener como producto final (representado por la demanda final). En cualquier caso, esta cuestión crucial se escapa de los propósitos del artículo. El lector interesado en como tratar este fenómeno puede consultar [22], [23], [24] donde se trata sucintamente la cuestión. Hay varios autores, tales como Tomas Härdin y David Zachariah, que están estudiando estos temas en profundidad.

Denotemos por $a_{j,i}$ a la *cantidad de unidades* del tipo de bien j[19] necesarios para producir una unidad del tipo de bien i [20] y por ℓ_i a la *cantidad de horas de trabajo directo necesarias* para ensamblar una unidad del tipo de bien i. Así, la producción del tipo de bien i queda caracterizada por el vector $[a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}, \ell_i]$, que representa los insumos requeridos y el trabajo de ensamblaje de esos insumos para producir, después de un cierto periodo (de producción), una unidad del bien de tipo i.

La cantidad de trabajo que una unidad del bien de tipo i encarna es la suma del trabajo directo empleado ℓ_i en su producción y del trabajo "guardado" en los insumos utilizados. Esta cantidad la denotaremos por λ_i. Llamamos a λ_i *coste laboral integrado* (CLI) del bien $i-$ésimo.[21] A continuación veremos cómo podemos calcular los CLI de todos los bienes. Empecemos primero con los CLI de los bienes de producción.

Veamos un ejemplo ilustrativo de cómo funcionaría todo esto en una economía sencilla.

[18] El lector más vivaz podría replicar que una cierta técnica puede ser más eficiente que otra si el conjunto escogido de técnicas para producir el resto de tipos de bienes es diferente, y estaría en lo cierto.

[19] Las unidades de los $a_{j,i}$ son unidades físicas fijadas con antelación. Por ejemplo, si el tipo de bien j fuera pan, podríamos usar como unidad de referencia el kilo o el gramo.

[20] Una vez desagregada la economía por sectores, $a_{j,i} = \frac{z_{j,i}}{x_i}$ siendo $z_{j,i}$ la cantidad de bienes producidos en el sector j que son insumos del sector i (en una economía capitalista la unidad de $z_{j,i}$ y del resto de variables puede ser monetaria) y x_i la cantidad total de bienes producidos en el sector i. Esta sería una forma práctica de calcular los $a_{j,i}$.

[21] Muchos autores, por ejemplo Anwar Shaikh en [25] o Pablo Ruiz Nápoles en [26] definen este concepto de una manera diferente al incluir compensaciones salariales para analizar ciertos fenómenos del comercio internacional. En nuestro texto este concepto equivaldría a lo que ellos llaman *coeficientes de trabajo verticalmente integrados*.

2.3 Ejemplo simplificado de economía comunal neandertal

Imaginemos que pertenecemos a una tribu neandertal durante el paleolítico superior y que queremos planificar la economía de nuestros bienes: las piedras, los palos y los cuernos de caza. Tenemos la siguiente tabla de costes materiales para la realización de cada actividad:

	Tallar Piedras	Talar árboles	Cazar Cérvidos
Piedras	0.1	0.2	0.2
Palos	0	0.1	0.2
Cuernos	0.01	0.1	0.5

Esta tabla nos indica que para tallar una unidad de piedras, se necesitan 0.1 unidades piedras, 0 unidades de palos y 0.01 unidades de cuernos. A simple vista esto no parece evidente, por ejemplo, ¿piedras para hacer piedras? ¿y los cuernos para qué? Pensándolo más detenidamente, para tallar piedras se necesitan otras piedras ya talladas para golpearlas entre ellas (percutores duros), y se necesitan cuernos y palos como herramientas de apoyo para terminar de limar las piedras (percutores blandos).

Si asignamos los índices 1, 2 y 3 a la piedra, los palos, y los cuernos, respectivamente: $a_{1,1} = 0.1$, $a_{2,1} = 0$ y $a_{3,1} = 0.01$ para las piedras, y $a_{1,3} = 0.2$, $a_{2,3} = 0.3$ y $a_{3,3} = 0.5$ para los cuernos.[22]

La matriz A sería como la "receta" para producir cada tipo de bien.[23] Pues cada columna de la matriz se puede entender como los recursos que necesita cada "industria", es decir, un *demandante* en economías de mercado, mientras que cada fila se puede entender como lo que oferta cada sector a los demás, y por lo tanto es un *oferente*:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Entendido esto, pensemos en una situación más compleja. Uno de los neandertales de la tribu quiere realizar un proyecto comunal: quiere hacer una serie de estatuas representando la maternidad y a la Diosa Madre, y, para ello, necesita una unidad de piedra tallada. La pregunta que se plantea es: ¿cuánto deberíamos producir de cada recurso para que tengamos una producción de una unidad *final* de piedra? La cantidad extra que se quiere producir normalmente se conoce como demanda final y puede ser

[22] Los $a_{j,i}$ se denominarán más tarde "coeficientes técnicos".
[23] La matriz A se llamará "matriz tecnológica".

representada por el vector de demanda final **d**, cuyos componentes son la demanda final d_i de cada tipo de bien, en este caso, $\mathbf{d} = (1, 0, 0)^T$, porque queríamos producir solamente una unidad final del bien 1 (piedra). Si quisiéramos producir dos unidades de piedra y una de cuernos, el vector de demanda final sería $\mathbf{d} = (2, 0, 1)^T$.

Las cantidades de bienes que necesitamos producir son una incógnita que necesitamos calcular. A esta incógnita se le conoce como *producción total*, y está representada por el vector $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})^T$ siendo i el tipo de bien del que queremos producir una unidad final ($i = 1$ para el caso de la piedra). Este vector almacena las cantidades $x_j^{(i)}$ de todos los bienes j que se necesitan para satisfacer la demanda final de un bien i dentro del sistema de sectores conectados. ¡Atención! Estos valores no hay que confundirlos con los valores a_{ji}, los cuales se limitan a especificar la cantidad de recursos necesaria para producir un bien en un sector concreto.

Ahora nos planteamos el problema por separado para cada tipo de bien, ¿cuánta piedra necesitaríamos producir?, pues la necesaria para "alimentar" la propia producción de los sectores interconectados *más* una unidad de piedra (para satisfacer la demanda final):

$$\underbrace{x_1^{(1)}}_{\text{Producción total}} = \underbrace{a_{11}x_1^{(1)}}_{\text{Sector 1}} + \underbrace{a_{12}x_2^{(1)}}_{\text{Sector 2}} + \underbrace{a_{13}x_3^{(1)}}_{\text{Sector 3}} + \underbrace{d_1}_{\text{Demanda final}} . \tag{6}$$

Antes de seguir, vamos a analizar los términos presentes en (6). Vemos que por ejemplo el término $a_{12}x_2^{(1)}$ se refiere a la cantidad de unidades de piedra necesaria para producir una unidad de palos multiplicada por la cantidad necesaria de unidades de palos para producir ese 1 de piedra final deseada.[24] En nuestro caso particular tenemos que

$$x_1^{(1)} = 0.1x_1^{(1)} + 0.2x_2^{(1)} + 0.2x_3^{(1)} + 1 . \tag{7}$$

Análogamente obtenemos para los palos y los cuernos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x_1^{(1)} = a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} + 1 , \tag{8}$$
$$x_2^{(1)} = a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + a_{23}x_3^{(1)} + 0 , \tag{9}$$
$$x_3^{(1)} = a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_{33}x_3^{(1)} + 0 . \tag{10}$$

[24] Con final nos referimos a las unidades de bienes que obtenemos tras reponer los bienes usados en la producción.

En nuestro caso particular tenemos que

$$\underbrace{\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{matrix}}_{\mathbf{x}^{(1)}} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 0.1x_1^{(1)} + 0.2x_2^{(1)} + 0.2x_3^{(1)} \\ 0x_1^{(1)} + 0.1x_2^{(1)} + 0.2x_3^{(1)} \\ 0.01x_1^{(1)} + 0.1x_2^{(1)} + 0.5x_3^{(1)} \end{matrix}}_{A\mathbf{x}^{(1)}} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1\,, \\ 0\,, \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{d}} . \tag{11}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales obtendríamos las cantidades necesarias de cada recurso para poder realizar el proyecto comunal. De forma matricial tenemos que

$$\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}\,. \tag{12}$$

Teniendo en cuenta el método descrito en la Sección 4.2 para calcular la inversa de matrices invertibles tenemos que

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.12 & 0.31 & 0.57 \\ 0.01 & 1.16 & 0.47 \\ 0.02 & 0.24 & 2.10 \end{bmatrix},$$ [25]

y así finalmente obtenemos que

$$\mathbf{x}^{(1)} = (I - A)^{-1}\mathbf{d} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0.9 & -0.2 \\ -0.01 & -0.1 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.12 & 0.31 & 0.57 \\ 0.01 & 1.16 & 0.47 \\ 0.02 & 0.24 & 2.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12 \\ 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix},$$

donde la matriz $(I - A)^{-1}$ se le denomina "matriz inversa de Leontief".

¡Ya tenemos nuestro problema resuelto! Debemos tener una producción total de 1.12 unidades de piedra, 0.01 unidades de palos y 0.02 unidades de cuernos para producir una unidad final de piedra. Este resultado refleja la necesidad de producir una pequeña cantidad de palos y cuernos para esta obra comunal. ¿Por qué? ¿No ponía en la tabla pone que para tallar la piedra no se necesitaban palos? Esto se debe a que sí que necesitamos cuernos para tallar piedra y que para obtener cuernos sí que se necesita

[25] El lector más escéptico puede comprobar que en efecto $(I - A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I - A) = I$.

el uso de palos.

Supongamos que para tallar una unidad de piedra se requiere, en promedio, una hora de trabajo, para talar una unidad de palos se requiere, en promedio, dos horas de trabajo y para cazar una unidad de cuernos se requiere, tres horas de trabajo. Entonces, resultaría que el coste laboral integrado (CLI) del tipo de bien 1 (piedra) sería (aproximadamente) $1,12 \cdot 1 + 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 1,2$ horas de trabajo. Pues directa o indirectamente se requerirían (aproximadamente) $1,2$ horas de trabajo producir una unidad de piedra.

2.4 Tratamiento general para economías industriales

Como decíamos, lo anterior sería un ejemplo para una economía simplificada, pero, en realidad, el razonamiento no varía tanto al ampliar la escala. El mismo método se puede usar para resolver los problemas logísticos de una economía de millones de bienes distintos. Para ilustrar cómo se haría esto, sin embargo, no podemos más que describir los pasos en abstracto (con variables). Asimismo, y a diferencia de Leontief, hemos dividido el desarrollo en bienes de producción y bienes de consumo para mayor generalidad y, además, para poder desacoplar ciertas operaciones en diferentes sistemas de ecuaciones. Esto está inspirado en los métodos empleados por M. Morishima en [27].

2.4.1 Costes laborales integrados de los bienes de producción

Sabemos que para poder producir un bien del tipo 1 se necesitan $a_{1,1}, \ldots, a_{n,1}$ unidades de los bienes de producción $i = 1, \ldots, n$ respectivamente. Estas unidades requeridas también necesitan insumos para poder ser ensamblados y esos nuevos insumos requerirán otros insumos, y así sucesivamente "seguimos la pista" hasta que ya no queden más insumos indirectos que tener en cuenta.

Dada esta interconexión entre los diferentes sectores industriales, puede intuirse que un incremento en una unidad de producto final del bien de tipo 1 genera un efecto "multiplicador" o "cascada" en la cantidad de bienes de producción de todos los tipos, incluido del primer tipo (por ejemplo, para producir electricidad es necesaria una cantidad mínima de electricidad). Para obtener las cantidades totales de bienes de producción $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ que son requeridas para obtener una unidad final del tipo de bien 1, tras tener todas las repercusiones en cuenta, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(1)} + 1 \\ x_2^{(1)} = a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(1)} + 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(1)} = a_{n,1}x_1^{(1)} + a_{n,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(1)} + 0 \end{cases} \tag{13}$$

Una vez resuelto, el CLI del bien de tipo 1 viene dado por

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(1)} .$$

La notación $\sum_{j=1}^{n} f(j)$ representa $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ siendo f una función cualquiera. Es decir, $\sum_{j=1}^{n} f(j)$ significa sumar todos los valores de la función f en los números consecutivos desde el límite inferior ($j = 1$) hasta el límite superior ($j = n$). Por ejemplo, consideremos $f(j) = j$, $\sum_{j=1}^{3} f(j) = \sum_{j=1}^{3} j = 1 + 2 + 3 = 6$, es decir, la suma de los números consecutivos desde el 1 hasta el 3. Al símbolo $\sum$ se le denomina sumatorio.

Teniendo en cuenta que producir cada uno de los insumos requiere un cierto periodo de tiempo, los $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^{(1)}$ con $i = 1, \ldots, n$ tienen que estar disponibles antes de comenzar dicho periodo y los $x_i^{(1)}$ con $i = 1, \ldots n$ estarán disponibles al acabar dicho periodo. En la producción real de artículos, las industrias usan los bienes de producción necesarios mientras que al final del periodo son remplazados. Las partes del producto final que permanecen tras la reposición son llamados productos finales. En el momento presente solamente tenemos una unidad del bien de tipo 1 como producto final. Similarmente, procedemos con el bien de tipo 2 para obtener las cantidades totales de bienes de producción $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$ que son requeridas para obtener una unidad final del tipo de bien 2. Tras tener todas las repercusiones en cuenta, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(2)} + 0 \\ x_2^{(2)} = a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(2)} + 1 \\ \vdots \\ x_n^{(2)} = a_{n,1}x_1^{(2)} + a_{n,2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(2)} + 0 \end{cases} \tag{14}$$

Una vez resuelto, el CLI del bien de tipo 2 viene dado por

$$\lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(2)} .$$

Repitiendo el proceso de manera análoga con el resto de tipos de bienes de producción, es decir, con los de tipo i siendo $i = 3, \ldots, n$ obtenemos n sistemas de ecuaciones que podemos escribir de forma matricial como

$$X_I = A_I X_I + I \ , \tag{15}$$

con

$$X_I = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \ldots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{bmatrix} ,$$

$$A_I = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} .$$

Una vez los productos (finales) $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ (columna $i-$ésima de X_I) requeridos para producir una unidad (de producto final) del tipo de bien de producción $i-$ésimo están determinados, podemos calcular el CLI del bien $i-$ésimo así:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)} \ . \tag{16}$$[26]

A la matriz A_I se le llama *matriz tecnológica* cuyas entradas se denominan comúnmente *coeficientes técnicos* y representan cuántas unidades se requiere en promedio para producir una unidad de cada bien. Fijémonos en las columnas de A_I, que representan los requerimientos (insumos) de cada tipo de bien.

Si escribimos $L_I = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$, $M_I = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ tenemos que

$$M_I = L_I X_I \ . \tag{17}$$

Hasta aquí hemos calculado los CLI de todos los bienes de producción, ahora procedemos a calcular los CLI de los bienes de consumo.

[26] En [28] se prueba que este procedimiento es equivalente al más intuitivo de resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{1,1}\lambda_1 + a_{2,1}\lambda_2 + \ldots + a_{n,1}\lambda_n \\ \lambda_2 = a_{1,2}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \ldots + a_{n,2}\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n = a_{1,n}\lambda_1 + a_{2,n}\lambda_2 + \ldots + a_{n,n}\lambda_n . \end{cases}$$

2.4.2 Costes laborales integrados de los bienes de consumo

La producción de los bienes de consumo se puede dividir en dos etapas: en la primera etapa se fabrican los bienes de producción necesarios y en la segunda se combinan estos bienes para obtener los bienes de consumo finales. La cantidad de bienes de producción requeridos para producir una unidad de bien de consumo de tipo i (con $i = n+1, \dots, m$) son $a_{1,i}, \dots, a_{1,n}$, con el propósito de remplazar estos bienes de producción consumidos en el proceso de fabricación, necesitamos $x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ unidades de bienes de producción de tipo $j = 1, \dots, n$ respectivamente que vienen determinados por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1^{(i)} = a_{1,1}x_1^{(i)} + a_{1,2}x_2^{(i)} + \dots + a_{1,n}x_n^{(i)} + a_{1,i} \\ x_2^{(i)} = a_{2,1}x_1^{(i)} + a_{2,2}x_2^{(i)} + \dots + a_{2,n}x_n^{(i)} + a_{2,i} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} = a_{n,1}x_1^{(i)} + a_{n,2}x_2^{(i)} + \dots + a_{n,n}x_n^{(i)} + a_{n,i} \end{cases} \tag{18}$$

En la primera etapa la sociedad consume $\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)}$ horas de trabajo, mientras que en la segunda etapa la sociedad consume ℓ_i horas de trabajo. Por tanto, el CLI del bien de consumo de tipo i es $\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j^{(i)} + \ell_i$.[27] Aquí, hemos realizado el procedimiento para un tipo de bien $i = n+1, \dots, m$ arbitrario. Poniendo en forma matricial las ecuaciones que hemos obtenido hasta ahora obtenemos

$$X_{II} = A_I X_{II} + A_{II} \,, \tag{20}$$
$$M_{II} = L_I X_{II} + L_{II} \,, \tag{21}$$

siendo

$$X_{II} = \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} & x_1^{(n+2)} & x_1^{(n+3)} & \dots & x_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(n+1)} & x_n^{(n+2)} & x_n^{(n+3)} & \dots & x_n^{(m)} \end{bmatrix},$$

[27] En [28] se prueba que este procedimiento es equivalente al más intuitivo de resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} = a_{1,n+1}\lambda_1 + a_{2,n+1}\lambda_2 + \dots + a_{n,n+1}\lambda_n \\ \lambda_{n+2} = a_{1,n+2}\lambda_1 + a_{2,n+2}\lambda_2 + \dots + a_{n,n+2}\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_m = a_{1,m}\lambda_1 + a_{2,m}\lambda_2 + \dots + a_{n,m}\lambda_n \end{cases} \tag{19}$$

$$A_{II} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,n+1} & a_{2,n+2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,n+1} & a_{n,n+2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

$M_{II} = [\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_m]$ y $L_{II} = [\ell_{n+1}, \dots, \ell_m]$. Notamos que X_{II} es una matriz con n filas y $m - n$ columnas.

Ahora, si en lugar de desear producir una unidad final del bien de producción i-ésimo, deseamos producir d_i unidades finales del tipo de bien i-ésimo con $i = 1, \dots, n$ entonces necesitamos $x_1, \dots, x_n$ unidades de cada tipo de bien de producción respectivamente, que vienen determinadas por

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Producto total}} = \underbrace{A_I\mathbf{x}}_{\text{Consumo intermedio}} + \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Producto final}} \iff (I - A_I)\mathbf{x} = \mathbf{d}\,,$$

siendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Por tanto, si existe $(I - A_I)^{-1}$ (a esta matriz se le denomina *Matriz Inversa de Leontief*)[28] [29] entonces $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1}\mathbf{d}$.

Si en lugar de desear producir una unidad neta del bien de consumo i–ésimo, deseamos producir d_i unidades netas del tipo de bien i–ésimo con $i = n + 1, \dots, m$ entonces necesitamos $x_1, \dots, x_n$ unidades de cada tipo de bien de producción respectivamente, que vienen determinadas por

$$\mathbf{x} = A_I\mathbf{x} + A_{II}\mathbf{d} \iff (I - A_I)\mathbf{x} = A_{II}\mathbf{d}\,,$$

[28] La investigación sobre condiciones suficientes para la existencia de $(I - A_I)^{-1}$ de tal manera que el vector $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1}\mathbf{d}$ tenga todas las entradas no negativas se escapa al alcance del artículo, el lector interesado en cuestiones relacionas con los problemas mencionados puede consultar [28, Capítulo 2] y [27].

[29] Bajo ciertas condiciones técnicas (el lector puede consultar por ejemplo [29, p.351]) sobre A_I, que generalmente se satisfacen en una economía, resulta que $(I - A_I)^{-1} = I + A_I + \dots + A_I^q + A_I^{q+1} + \dots$ (aquí aparecería un límite pero definirlo rigurosamente escapa el propósito del artículo, en su lugar, el lector puede interpretarlo como una 'suma infinita'). De hecho, si $A_I^{q+1} = 0$ entonces $(I - A_I)^{-1} = I + A_I + \dots + A_I^q$. Estas igualdades son realmente interesantes, más allá de darnos maneras alternativas de calcular $(I - A_I)^{-1}$ nos permiten dar un sentido económico preciso a la Matriz Inversa de Leontief. Basta entender que $A_I\mathbf{x}$ son los insumos requeridos para producir x_i unidades del tipo de bien i con $i = 1, \dots, n$, $A_I^2\mathbf{x}$ son los insumos requeridos para producir los insumos requeridos para producir x_i unidades del tipo de bien i con $i = 1, \dots, n$ y así sucesivamente.

siendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{n+1} \\ d_{n+2} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}.$$

Por tanto, si existe $(I - A_I)^{-1}$ entonces $\mathbf{x} = (I - A_I)^{-1} A_{II} \mathbf{d}$.

Ahora vemos claramente cual es la estrategia básica de nuestra planificación económica. Fijado el vector d, que representa la cantidad final de productos de cada tipo que se desea producir, calculamos cuántas unidades totales de cada tipo de bien de producción, x, es necesario fabricar. Así, podemos evitar los dos grandes problemas de la Unión Soviética descritos previamente en la Introducción, sin necesidad de utilizar una unidad monetaria para describir los flujos de trabajo.[30] [31] Por supuesto, estimar d supone también un cierto reto, aunque mucho menor de lo que pudiera parecer a simple vista, más aún con la tecnología actual, que nos permite tener mecanismos en tiempo real de retroalimentación de información. Este problema es tratado extensamente en [19].

[30] A pesar de que calcular en general la inversa de matrices grandes de forma exacta es relativamente costoso (pues el número de operaciones necesarias no crece de forma lineal con el número de filas tal y como se muestra en la Seccion 4) hay que tener en cuenta:

1. Las matrices A_I, A_{II} no son matrices cualesquiera; por un lado, su tamaño depende del nivel en el que desagreguemos la economía en tipos de artículos (o sectores) y por otro lado, a medida que lo hacemos las matrices se tornan dispersas, es decir, la proporción de entradas nulas irá creciendo. Las matrices dispersas son muy especiales por ser altamente manejables. Además, el total de tipos de bienes existentes en una economía real siempre será considerablemente menor que la población total.
2. No necesitamos calcular nada de forma exacta. Sólo necesitamos métodos iterativos que nos proporcionen soluciones aproximadas con la precisión deseada. El área de las matemáticas que se encarga de hacer esto mismo se llama Análisis Numérico y ha sido una de las áreas de las matemáticas aplicadas más fructíferas del último siglo, más aún con el desarrollo de la computación. El lector interesado en este tipo de herramientas puede consultar [30-34].

[31] Si los artículos de consumo personal que se encuentran en las tiendas públicas se adquieren en contra de su CLI equivalente en bonos de trabajo, el problema descrito en el Apéndice A desaparece.

3 Optimización

Con lo dicho quedarían contestadas una buena parte de las dudas sobre el funcionamiento de la planificación ciber-socialista, pero en una economía compleja hay más problemas a tener en cuenta.

Dado un tejido agroindustrial concreto, siempre son concebibles diferentes maneras de abordar un mismo problema, labor u objetivo de producción, cada una con unos resultados parcial o enteramente distintos. Hablamos de opciones alternativas a la hora de elegir tecnologías, distribuciones de plantilla, rutas de transporte y/o reparto, etc. Pensemos en un ejemplo fácil: trabajar la tierra. A priori, es intuitivo que arar el campo con un tractor es más eficiente que usar herramientas manuales. Pero, si lo pensamos con más calma, esta dicotomía no es realista. Los tractores no caen del cielo. También hay que producirlos y cabría pensar escenarios en los que lanzarse a ensamblar tractores no fuese razonable. Esto es de lo más simple que podemos pensar, pero, con un poco de imaginación, no es difícil caer en la cuenta de que muchos de los retos que nos depara este siglo implicarán situaciones de este estilo: ¿cómo asumir la transición a una economía postcarbono? ¿invertimos millones y millones de horas de trabajo en una energía experimental que, al cabo de unos años, podría solucionar el problema energético durante siglos, o "vamos a lo seguro" y, simplemente, combinamos, como bien podamos, las actualmente existentes?[32]

En cualquier caso, estos problemas pueden resumirse en el intento de maximizar o minimizar ciertas cantidades bajo ciertas restricciones. Entre otras cosas, se podría tratar de minimizar el número de horas de trabajo necesarias en un sector peligroso y/o desagradable o la cantidad de CO_2 emitido para producir cierto producto. Pues bien, gracias a las aportaciones del matemático y economista Leonid Kantoróvich,[33] sabemos que la mayoría de estos problemas pueden modelarse matemáticamente en lo que se conoce como *problemas de optimización*. Formalizar y resolver estos, en base a los recursos disponibles, nos aporta indicaciones claras de cómo actualizar o desarrollar nuestra economía de forma eficiente.

Recordemos lo dicho en la sección 1. En el ecosistema mercantil las necesidades sociales son eclipsadas por la mediación del imperativo de la rentabilidad; dichas situaciones son interpretadas como oportunidades de ganancia, subrogando todas la innovaciones técnicas del conocimiento colectivo a este fin. Esta dinámica es tremendamente arbitraria y da origen de un sin fin de problemas (sobreproducción de productos

[32] No hay que confundir esto con el problema, mencionado en el capítulo anterior, de calcular el coste laboral integrado de un bien que se está produciendo *simultáneamente* de diferentes maneras. La cuestión ahora es seleccionar, entre una diversidad de iniciativas *posibles*, *la mejor*.

[33] Kantoróvich también fue premiado por este mismo tema con el Premio de Ciencias Económicas del Banco de Suecia en Memoria de Alfred Nobel en 1975

innecesarios, pero rentables, escasez de otros necesarios, pero no rentables, crisis, etc.) pero... ¿No hay otra manera de hacer las cosas? ¿No es intuitivo que los mecanismos de optimización que hoy utilizan Amazon o Walmart, a escala intraempresarial,[34] podrían usarse para propósitos más emancipadores, de manera aún más eficiente si cabe, al socializar todas las empresas y abolir la enorme limitación que hoy supone que estas oculten información entre sí?

En este capítulo veremos justamente eso: cómo la optimización matemática podría usarse en una economía democráticamente planificada para garantizar el mayor rendimiento posible de nuestras infraestructuras. Como se explica en otros sitios [36] [37], esto no implica que todas nuestras empresas públicas tengan que usar las mismas técnicas productivas. Hay un enorme espacio para la innovación y la experimentación, pero esto es un tema que sobrepasa las intenciones de este artículo. Centrémonos ahora en la idea de optimización.

3.1 Optimización Matemática

El primer paso para modelar un problema de optimización sería definir la *función objetivo* a maximizar o minimizar. Dicho de forma matemática, necesitamos encontrar una función $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, dónde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales (cualquier número) y $\mathcal{A}$ normalmente es un subconjunto del espacio Euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Esto último puede sonar algo complejo, pero puede comprenderse fácilmente con un ejemplo. Todos estamos acostumbrados a las 3 dimensiones en nuestro día a día (ancho, alto y largo). ¡O incluso 4 dimensiones! Si es que hemos oído hablar de Albert Einstein... Pues bien, estas 3 dimensiones representarían el espacio Euclídeo $3-$dimensional $\mathbb{R}^3$. Por otro lado, $\mathcal{A}$ es un subconjunto de dicho espacio, es decir, todos los elementos de $\mathcal{A}$ pertenecen a $\mathbb{R}^3$, gráficamente sería una porción del mismo. Por ejemplo, una esfera sería un subconjunto del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Por último, solo queda extender las matemáticas utilizadas para $\mathbb{R}^3$ a n dimensiones. Los puntos de $\mathbb{R}^3$ vienen definidos por 3 coordenadas, es decir, no son nada más que tripletes ordenados (3-tuplas) de números reales. Análogamente, los puntos en $\mathbb{R}^n$ no son nada más que $n-$tuplas de números reales, es decir, cada punto en $\mathbb{R}^n$ viene definido por n números ordenados. Al lector esto le habrá sonado familiar pues los elementos de $\mathbb{R}^n$ son exactamente los vectores filas o columnas con n columnas o n filas respectivamente introducidos en la Sección 2.

Este último paso es sencillo, pero difícil de imaginar, ya que nadie ha podido observar nunca un objeto en más de 3 dimensiones. Sin embargo, en matemáticas es perfectamente posible. En economía, las n dimensiones tienen un significado más tangible,

[34] Se puede leer sobre el uso de estas técnicas en dichas corporaciones en [35, Capítulo 4].

por ejemplo, al representar las unidades de cada tipo de artículo que se van a emplear en una cierta tarea.

El subconjunto $\mathcal{A}$ vendrá definido por las *restricciones* del problema. Formalmente, los puntos de $\mathcal{A}$ serán $n-$tuplas de números que verificarán unas ciertas desigualdades y/o igualdades. Por ejemplo, estas restricciones pueden venir de limitaciones en el total de jornadas laborales empleadas o en el total de toneladas de CO_2 generadas.

Llegados a este punto, ya conocemos todos los ingredientes necesarios para describir un problema de optimización, es decir, la función objetivo y las restricciones. La optimización es una rama muy amplia de las matemáticas, la cual implica un sinfín de técnicas diferentes dependiendo de las características específicas del problema a resolver. En este artículo ponemos el foco en la *programación lineal*. La Sección 3.2 presenta en detalle la descripción y aplicación de la programación lineal a problemas económicos. Sin embargo, ciertos aspectos de la economía, como podrían ser las economías de escala, no pueden ser tratados por la programación lineal, pues o bien la función objetivo no es lineal o bien las relaciones que definen las restricciones no son lineales. Este aspecto es tratado con mayor detalle en la Sección 3.3.

3.2 Programación Lineal

Las relaciones lineales entre variables son de proporcionalidad. Consecuentemente, una función lineal f definida en $\mathbb{R}^n$ manda combinaciones lineales de los vectores x, y en combinaciones lineales de $f(x), f(y)$, con las mismas constantes de proporcionalidad, formalmente, diremos que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal si

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$. El aspecto que estas funciones tienen es, por ejemplo, el de recta en el plano o el de plano en $\mathbb{R}^3$. Este tipo de funciones son muy manejables mediante computadoras y tienen propiedades interesantes.

Los problemas de programación lineal suelen representarse en la literatura con la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{22}$$

donde $\mathbf{c}^T$ es un vector fila $1 \times n$, $\mathbf{x}$ es un vector columna $n \times 1$, $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ y $\mathbf{0}$ es un vector columna $n \times 1$ cuyos elementos son únicamente 0's. El problema anterior trata de maximizar la función (lineal) $\mathbf{x} \to \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ sujeta a unas ciertas restricciones que a continuación explicaremos.[35]

Las dos aparentes restricciones, al estar expresadas en notación matricial, corresponden, en realidad, a múltiples restricciones individuales. Por ello, vemos conveniente utilizar la notación matricial en este tipo de problemas.

Como vimos en la Sección 2, cuando se introdujo el concepto de producto matriz-vector, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ representaría m desigualdades, pues la matriz A tiene dimensiones $m \times n$ donde n es el número de variables en nuestro problema. Las m restricciones puede hacer referencia, por ejemplo, a diferentes insumos en un proceso de fabricación, horas trabajadas, maquinaria utilizada... Lo relevante aquí es tener en cuenta que las restricciones tendrán siempre un significado en el mundo real. La segunda restricción es bastante habitual y se encarga de que las variables en $\mathbf{x}$ no tomen valores negativos para evitar soluciones que no tienen sentido en el mundo real, como podría ser el producir un número negativo de vehículos.

Intentemos ahora resolver un problema concreto con las herramientas que tenemos hasta el momento. Parece ser que en en último plebiscito sobre la descarbonización de la economía, los ciudadanos han elegido darle una mayor importancia a la bicicleta como medio de transporte. Al contrario que en una economía capitalista, no es necesario esperar a ajustes de la oferta y la demanda o a que algún capitalista detecte la oportunidad de mercado, sino que el resultado del plebiscito puede implementarse directamente en todo el sector bicicletero.

Dada una fábrica de bicicletas que produce bicicletas de montaña (x_1) y bicicletas eléctricas (x_2), el objetivo es que la fabrica maximice su producción teniendo en cuenta que se espera que las adquisiciones de bicicletas eléctricas serán el doble que las de montaña, ya que las primeras son mucho más cómodas para desplazarse largas distancias hasta el trabajo. Este tipo de preferencias pueden reflejarse en la función objetivo utilizando el vector $\mathbf{c}^T = [1 \quad 2]$, resultando en la función objetivo $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = x_1 + 2x_2$. En otras palabras, las bicicletas eléctricas tienen un mayor peso en la función y por tanto se las priorizará en la producción.

Los insumos semanales de la fábrica son 60 kg de acero y 180 kg de aluminio. La producción de cada bicicleta de montaña requiere 1 kg de acero y 4 kg de aluminio, mientras que las bicicletas eléctricas precisan de 2 kg de acero y 2 kg de aluminio. Esto resulta en la restricciones para el acero (ecuación (23)) y el aluminio (ecuación (24)), ya que la producción nunca puede sobrepasar las materias primas necesarias en su

[35] Tal y como afirmamos en 6 toda aplicación lineal se puede representar por una función de la forma $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ siendo A una cierta matriz. Por tanto, en el problema anterior la función objetivo puede ser cualquier función lineal.

fabricación. Por último, habrá que considerar las horas de trabajo que precisa cada bicicleta. La fábrica consta de 4 empleados trabajando 35 h semanales cada uno y cada uno de ellos toma 3 horas para terminar una bicicleta de montaña y 4 horas para una eléctrica (ecuación (25)).

$$1x_1 + 2x_2 \leq 60 \tag{23}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 180 \tag{24}$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 140 \tag{25}$$

La ecuación (26) muestra las restricciones en forma matricial. Nótese que las últimas dos filas de la matriz A y el vector $\mathbf{b}$ aseguran que el número de bicicletas no sea negativo.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 180 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

La región factible se muestra en la Figura 3, donde las zonas sombreadas representan el espacio en el que las restricciones no se cumplen. Entre las intersecciones de todas las restricciones, queda un poliedro (región blanca en la figura) de tal forma que cualquier punto dentro de este poliedro cumple con todas las restricciones. Se puede demostrar que el punto que maximiza (o minimiza) la función objetivo debe ser uno de los vértices de dicho poliedro, por lo que todo algoritmo que pretenda encontrar el máximo (o mínimo) de la función objetivo, deberá evaluarlaen todos o en algunos de estos vértices, para así encontrar la solución al problema de programación lineal. Uno de los algoritmos más conocido es el algoritmo “simplex”.

3.2.1 El método simplex y sus aplicaciones

A continuación, expondremos, de manera intuitiva y sin entrar en los detalles del cálculo, el modus operandi del *algoritmo simplex*, el método usado comúnmente para resolver los problemas de programación lineal.

Para entenderlo basta con conocer dos características del problema: una relacionada con las restricciones y otra con las funciones objetivo.

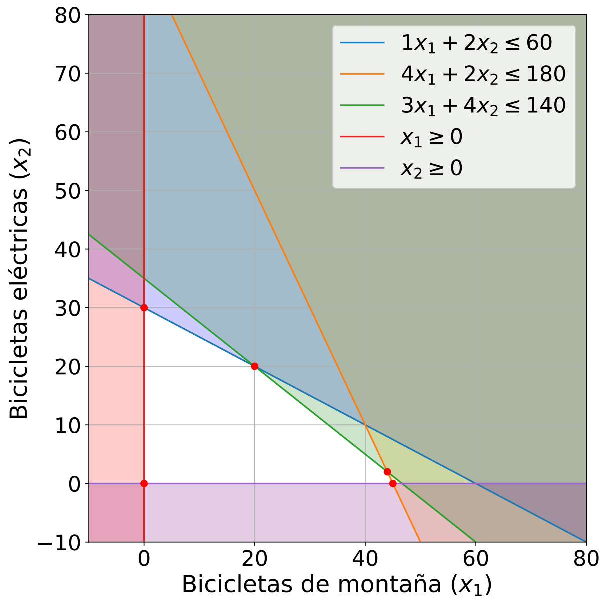


Figura 3: La región factible del problema de optimización es un poliedro. Los planos de diferentes colores corresponden a las restricciones del acero (azul), aluminio (naranja), horas de trabajo (verde) y no negatividad de la solución (rojo y violeta), respectivamente.

La primera es la forma específica de la región factible en la que las soluciones cumplen los requisitos impuestos por las restricciones. Esta es un poliedro convexo (un cubo o un dodecaedro son dos ejemplos, aunque las regiones factibles no tienen por qué ser solo en 3 dimensiones ni ser regulares).[36]

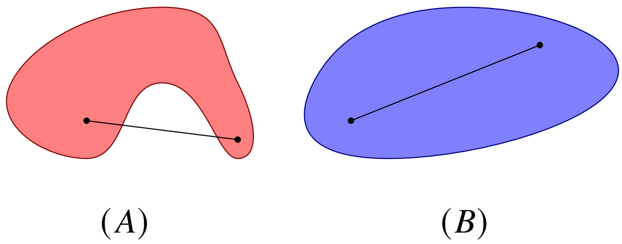


Figura 4: Ejemplo visual de un conjunto no convexo (A) y otro convexo (B).

La segunda característica del problema es que la función objetivo, al ser también una función lineal, ordena el espacio de soluciones dividiéndolas en líneas, planos o hiperplanos (es decir, la extensión del concepto para más de 3 dimensiones) en los

[36]Recordamos, antes de proseguir, que matemáticamente, un conjunto es convexo si y sólo si, para cualesquiera dos puntos del conjunto que tomemos, el segmento que los une se encuentra contenido en el conjunto.

cuales la función vale lo mismo (ver figura 6).

Dado esto, la idea es hacer aumentar (o disminuir) la función objetivo. Para ello tendríamos que desplazarnos subiendo (o bajando) en dirección perpendicular a esos planos. Estos dos resultados juntos nos llevan a la siguiente conclusión: las soluciones óptimas sólo pueden estar en un vértice o en varios (junto con los puntos entre ellos: una arista o una cara). Esto se puede imaginar en 3D apoyando un poliedro sobre una mesa ya sea sobre un punto o más, y buscando el otro punto a mayor altura: de manera intuitiva vemos que efectivamente será un vértice (o más).

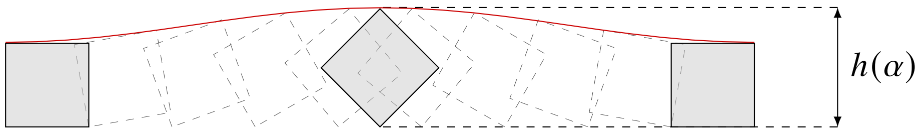


Figura 5: Ejemplo visual de los posibles máximos de un poliedro convexo sencillo (cuadrado) donde h(α) es la altura en función del ángulo de inclinación. Los puntos más altos o son un vértice o una arista.

Como a nosotros lo que nos interesa es encontrar una solución factible óptima, nos da igual si hay varias, lo interesante es llegar a una de ellas. Lo más importante del resultado anterior es que nuestro óptimo va a estar en algún vértice. Con este objetivo se diseñó un algoritmo que solamente se encarga de esto: el método simplex. Este procede en tres fases: 1. Inicialización, 2. Bucle y 3. Finalización.

1. El algoritmo se inicializa tomando un vértice cualquiera. De ahí, se analizan sus vértices adyacentes (conectados a este por una arista) y se calcula cuál de ellos tiene un valor mayor (si estamos maximizando) para la función objetivo.

2. A continuación, nos trasladamos a ese nuevo vértice y repetimos el proceso. Al ir siempre aumentando el valor de la función objetivo acabaremos llegando al vértice óptimo.

3. Esto se confirma al comprobar que sus vértices adyacentes tienen un valor menor para la función objetivo. Ahí se finaliza el símplex al haber alcanzado la solución factible óptima.

Una vez conocido el método simplex, podemos aplicarlo al problema anterior para la optimización de la fabricación de bicicletas y así obtener la solución al problema. Los vértices del poliedro que forma la región factible están marcados con círculos rojos en la Figura 3. Estos vértices son los puntos en los que cortan los planos que forman las restricciones. Por ejemplo, para obtener el punto de corte de las restricciones $x_1 \geq 0$ y $1x_1 + 2x_2 \leq 60$ tan solo es necesario resolver el sistema de ecuaciones formados por las dos restricciones. En otras palabras, sería necesario sustituir $x_1 = 0$ de la primera restricción en la ecuación $1x_1 + 2x_2 = 60$ para así obtener el punto de corte $(x_1, x_2) = (0, 30)$. Procediendo de una manera similar con el resto de restricciones, se obtendría la lista de vértices $[(0,0), (0,30), (20,20), (44,2), (45,0)]$.

El lector tan solo tiene que sustituir cada uno de estos puntos en la función objetivo $x_1 + 2x_2$ para encontrar su máximo, que en este caso sería 60. Es interesante observar que este máximo podría alcanzarse de dos maneras diferentes (i.e., para $(x_1, x_2) = (0, 30)$ y $(x_1, x_2) = (20, 20)$). En principio, cualquiera de las dos sería una solución válida a nuestro problema y la decisión final podría tomarse, por ejemplo, de manera aleatoria (lanzar una moneda al aire para decidir en función del resultado) o en base a la coordinación a escala sectorial (podría ser que la demanda de bicicletas de montaña quedara desabastecida si se eligiera $x_1 = 0$).

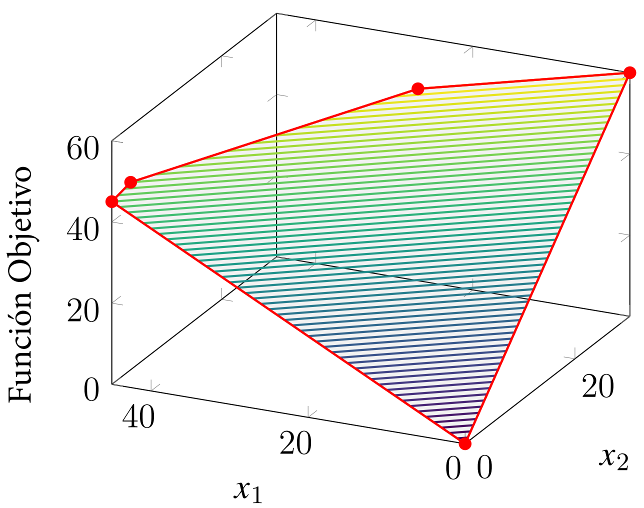


Figura 6: Valores de la función objetivo en la región factible, representada por el área delimitada por las líneas rojas. Nótese que la función tiene un valor constante en las rectas sombreadas en el interior del polígono (valor más bajo de color lila, más alto amarillo).

Para el lector interesado en el formalismo sobre el que se asienta este algoritmo, le recomendamos consultar la bibliografía correspondiente [38].

Veamos, con una serie de ejemplos, cuán versátil es la optimización lineal. Para ello vamos a ver que una gran variedad de problemas — en nuestro caso económicos — son en realidad problemas de programación lineal de una u otra forma, y por tanto resolubles por métodos como el simplex, descrito previamente.

3.2.2 Ejemplo histórico del Laboratorio Central de Plywood Trust

Vamos a tratar un ejemplo que, de hecho, se basa en un problema real que el Laboratorio Central de Plywood Trust le presentó a L. Kantorovich en torno a 1939 (descrito en [39]).

El problema consistía en maximizar la producción de diferentes tipos de madera en determinadas proporciones, haciendo uso de ciertas máquinas. Disponían 8 máquinas para producir madera y 5 tipos de madera distintos. La solicitud pretendía garantizar que el $10\%, 12\%, 28\%, 36\%$ y 14% del producto final fuese del primer tipo, del segundo tipo, del tercer tipo y del cuarto tipo de madera respectivamente. Sea p_k la proporción de madera del tipo k que se requiere producir, en nuestro caso: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,12$, $p_3 = 0,28$, $p_4 = 0,36$ y $p_5 = 0,14$. Denotemos por $\alpha_{i,k}$ al número de unidades de madera del tipo k que se producen en una jornada laboral usando la máquina i y por $h_{i,k}$ al tiempo, expresado como fracción de la jornada laboral, que vamos a utilizar la máquina i para producir madera del tipo k. Los $\alpha_{i,k}$ son datos conocidos por el Laboratorio Central que representan la productividad de las máquinas para fabricar los diferentes tipos de madera. Estos datos fueron concretamente los siguientes:

Número de la máquina	Tipo de madera				
	1	2	3	4	5
1	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	6,0	9,0	14,0	17,0
8	5,0	7,0	10,0	14,8	18,0

Cuadro 2: Los $\alpha_{i,k}$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

El problema consiste en obtener los $h_{i,k}$ con $i = 1, \ldots, 8$ y $k = 1, \ldots, 5$ que verifican las siguientes condiciones:

1. $h_{i,k} \geq 0$.[37]
2. $\sum_{k=1} h_{i,k} = 1$.[38]

[37] Esto es evidente pero es importante para no obtener soluciones con $h_{i,k} < 0$, que carecen de sentido.

[38] Cada máquina va a estar la jornada laboral entera produciendo algún tipo de madera.

3. $\frac{1}{p_1}\sum_{i=1}^{8} h_{i,1}\alpha_{i,1} = \frac{1}{p_2}\sum_{i=1}^{8} h_{i,2}\alpha_{i,2} = \frac{1}{p_3}\sum_{i=1}^{8} h_{i,3}\alpha_{i,3} = \frac{1}{p_4}\sum_{i=1}^{8} h_{i,4}\alpha_{i,4} = \frac{1}{p_5}\sum_{i=1}^{8} h_{i,5}\alpha_{i,5}$ y que este valor común sea máximo.[39]

La solución al problema anterior, aplicando el método del simplex es la siguiente:

Número de la máquina	Tipo de madera				
	1	2	3	4	5
1	0	0,3321	0	0	0,6679
2	0	0,9129	0,0871	0	0
3	0.5744	0	0,4256	0	0
4	0	0	0,9380	0,0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0

Cuadro 3: Los $h_{i,k}$, con $i = 1, 2, \ldots, 8$ y $k = 1, 2, \ldots, 5$, óptimos buscados.

[39]Si denotamos por $z_k = \sum_{i=1}^{8} h_{i,k}\alpha_{i,k}$ a las unidades producidas de cada tipo de madera $k = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces las unidades totales de madera producidas (en una jornada laboral) son $M = \sum_{k=1}^{5} z_k$. Tenemos que las condiciones $z_k = p_k M$ para todo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ son equivalentes con las primeras condiciones de 3. Para verlo, basta notar que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$, por definición de p_k, y que

$$\begin{aligned} p_k M &= p_k\left(\frac{p_1 z_1}{p_1} + \frac{p_2 z_2}{p_2} + \frac{p_3 z_3}{p_3} + \frac{p_4 z_4}{p_4} + \frac{p_5 z_5}{p_5}\right) \\ &= p_k(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)\frac{z_k}{p_k} \\ &= z_k. \end{aligned}$$

Estas últimas condiciones son más claras que las que aparecen en 3.

El total óptimo de unidades de maderas de cada tipo que se puede producir en una jornada laboral es

$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,1}\alpha_{i,1} = 0,5744 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 7.872\,,$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,2}\alpha_{i,2} = 0,3321 \cdot 7 + 0,9129 \cdot 7,8 = 9.44532\,,$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,3}\alpha_{i,3} = 0,0871 \cdot 9,7 + 0,4256 \cdot 10 + 0,9380 \cdot 9,0 + 1 \cdot 8,5 = 22,04287\,,$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,4}\alpha_{i,4} = 0,0620 \cdot 13,5 + 1 \cdot 13,5 + 1 \cdot 14,0 = 28,337 \text{ y}$$
$$\sum_{i=1}^{8} h_{i,5}\alpha_{i,5} = 0,6679 \cdot 16,5 = 11.02035\,,$$

respectivamente.

3.2.3 Miscelánea de otros posibles ejemplos

Ahora supongamos que tenemos n máquinas que forman parte del proceso de producción de un cierto tipo de bien, compuesto de m piezas (en principio pueden haber repeticiones de tipo de piezas, sin embargo, por simplicidad en el tratamiento, trataremos cada pieza como de distinto tipo y esto no supondrá ningún problema). Denotemos por $\alpha_{i,k}$ al número de piezas del tipo k que se producen en una jornada laboral usando la máquina i. Notemos que en caso de que la máquina i no sea capaz de producir piezas del tipo k (por ejemplo, un tractor no podría producir tornillos) entonces pondríamos $\alpha_{i,k} = 0$. ¿Qué buscamos? Deseamos distribuir el trabajo entre las diferentes máquinas de tal manera que maximicemos el número total de artículos completados. Denotemos por $h_{i,k}$ al tiempo, expresado como fracción de la jornada laboral, que vamos a utilizar la máquina i para producir piezas del tipo k. Nuestro problema es precisamente determinar los $h_{i,k}$ con $i = 1, ...n$, $k = 1, ..., m$ de tal manera que maximicemos el producto final de artículos acabados. Veamos que condiciones los $h_{i,k}$ han de verificar. Es evidente que $h_{i,k} \geq 0$ para todo i, k y que para cada i

$$\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1\ .$$ [40]

[40] Podemos asumir que cada máquina va a ser utilizada durante toda la jornada laboral, en caso contrario, se remplazaría la condición por $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} \leq 1$.

Si z_k es el total de piezas del tipo k producidas tenemos que

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k} \ ,$$

pues $\alpha_{i,k} h_{i,k}$ nos da el total de piezas del tipo k producidas utilizando la máquina i. Si deseamos obtener artículos completos ha de imponerse la condición $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$, es decir, que el total de piezas de cada tipo sea igual. Debemos maximizar el valor común, z, de todas estas cantidades. Por tanto solucionar el problema enunciado nos lleva a resolver el Problema A: Determinar $h_{i,k}$ con $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ tales que

1. $h_{i,k} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$.
2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$.
3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ y z es máximo siendo $z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k}$ para todo k .

El lector puede fácilmente escribir el Problema A de la forma (22).[41] Otras variaciones de este problema también encajan con la estructura del Problema A. Por ejemplo, si sólo produjéramos un único tipo de pieza con diferentes máquinas y hubieran distintos procesos necesarios de producción de la misma en la cual diferentes máquinas pudieran ser utilizadas,[42] llegaríamos al Problema A. Con la diferencia de que $\alpha_{i,k}$, en este caso, sería el número de piezas que han pasado por el proceso $k-$ésimo utilizando la máquina i durante una jornada laboral.

También podemos añadir al problema original condiciones limitantes adicionales, por ejemplo, si cada proceso de manufacturación requiriese una cantidad de energía diferente, podríamos querer limitar el gasto energético total. Denotemos por $c_{i,k}$ los kWh por día de energía que la fabricación de la pieza del tipo k usando la máquina i consume. El gasto energético total viene dado por la expresión $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} c_{i,k}$. Podemos entonces añadir al Problema A la restricción de que el gasto energético total sea menor o igual que C, para algún C prefijado. Así, llegamos al Problema B: Determinar $h_{i,k}$ con $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ tales que

1. $h_{i,k} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$.
2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$.
3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ y z es máximo siendo $z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} h_{i,k}$ para todo k .
4. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} h_{i,k} c_{i,k} \leq C$.

[41] El problema descrito en 3.2.2 pertenece a esta familia de problemas si tomamos como "$\alpha_{i,k}$" $\frac{\alpha_{i,k}}{p_k}$ siendo p_k la proporción de madera del tipo k que se requiere producir.

[42] Por ejemplo, fabricar armarios necesita primero talar árboles, cortar la madera en las dimensiones adecuadas, ...etc y todos estos procesos podrían realizarse con diferente maquinaria.

Observamos que $c_{i,k}$ puede sustituirse por el gasto de agua o de personas utilizadas en la producción del tipo de piezas k usando la máquina i y así podemos imponer restricción sobre la cantidad total de agua que se puede gastar o sobre el total de personas a utilizar.

Ahora, supongamos que una misma máquina es capaz de producir, a la vez, diferentes piezas (o de realizar varios procesos al mismo tiempo) y que podemos organizar el proceso productivo utilizando diferentes métodos de producción. Sea $\lambda_{i,k,l}$ el número de piezas del tipo k que se producen bajo el método de producción l-ésimo utilizando la máquina i. Si $h_{i,l}$ es el tiempo, expresado como fracción de la jornada laboral, que se emplea en utilizar la máquina i con el método de producción l-ésimo entonces la cantidad total de piezas del tipo k producidas usando todas las máquinas, z_k, vendrá expresado por $z_k = \sum_{i,l} \lambda_{i,k,l} h_{i,l}$. El mismo razonamiento que antes nos conduce al Problema C: Determinar los $h_{i,l}$ tales que

1. $h_{i,l} \geq 0$ para todo i, l .

2. $\sum_{k=1}^{m} h_{i,l} = 1$ para cada i .

3. $z = z_1 = \ldots = z_m$ y z es máximo siendo $z_k = \sum_{i,l} \lambda_{i,k,l} h_{i,l}$ para todo k .

Es incluso posible extender el problema aún más y expresar muchos otros problemas de la misma forma, sin embargo, creemos que con estos ejemplos al lector le habrá bastado para entender la idea detrás de su aplicación y de cuan versátil es la programación lineal a la hora de ser aplicada a problemas económicos, en cualquier escala. El lector interesado en ampliar sobre estos temas puede consultar [39] y [40]. Con respecto a la escala, la solución a los problemas que hemos planteado, que básicamente tratan sobre la optimización del uso de maquinaria, hacen una mayor diferencia al ser aplicados a sectores de la economía más grandes.

3.3 No-linealidades

Hasta ahora hemos considerado que las variaciones en la economía se producen de manera lineal. Esto significa que asumimos que para producir n veces más (o menos) cantidad de un producto x dado, necesitaremos n veces más (o menos) insumos. Esta es la mejor aproximación inicial al funcionamiento macroscópico real de las economías. Sin embargo, en un nivel más detallado del análisis se comprueba que hay ciertos sectores que se comportan de manera notoriamente diferente: hablamos de no-linealidades (ver figura 7).

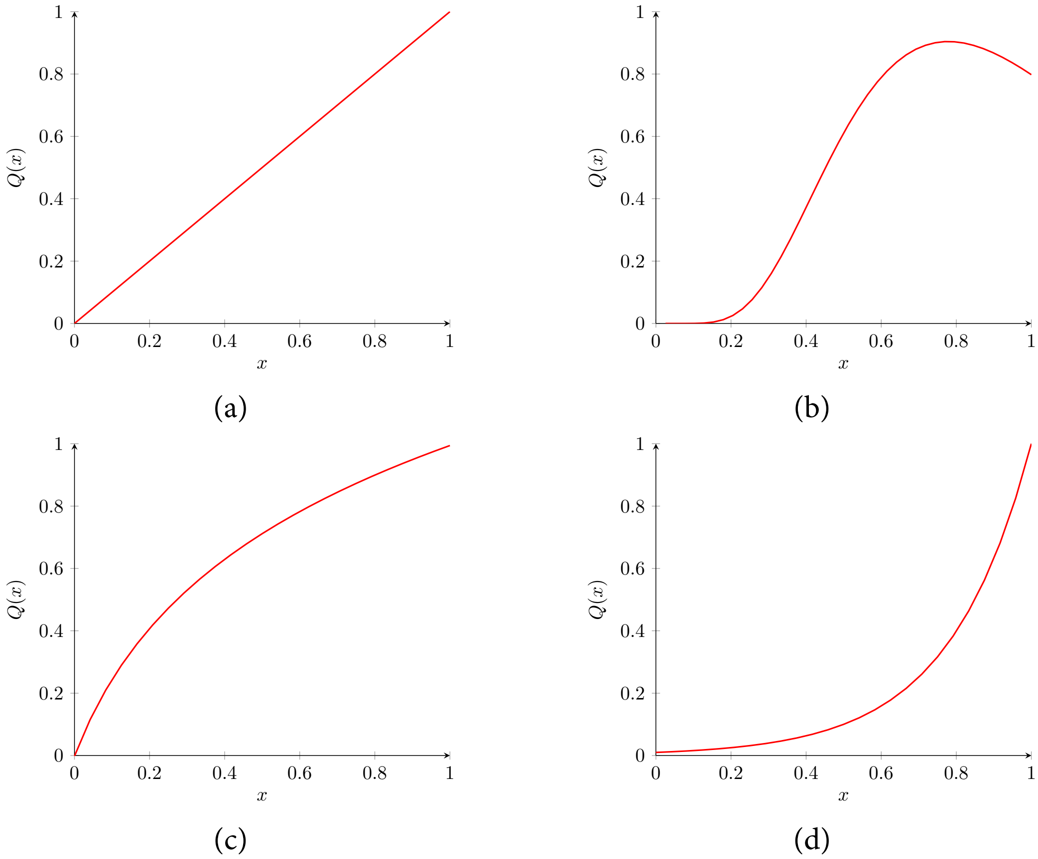


Figura 7: Ejemplos de funciones lineales (a), y no lineales (b,c,d). Si las entendemos como funciones de producción, el eje horizontal es la cantidad de insumos y el vertical la de productos.

Hay distintos tipos de fenómenos que impiden un comportamiento lineal: costes fijos, productividad marginal creciente, decreciente, etc… Además, incluiríamos entre las no-linealidades a las situaciones económicas en las que se requieren resultados enteros.[43] Las incluimos porque estamos manejando una noción de linealidad en sentido estricto: en casos lineales podemos reducir o aumentar el conjunto de insumos/productos por un ratio arbitrario, sin tener que limitarnos a resultados enteros.

3.3.1 Retos

Para facilitar la comprensión intuitiva de estos retos, presentamos varios ejemplos concretos de estos fenómenos en economías reales:

- Costes fijos: para visualizarlos, imaginemos un modelo lineal para el caso de la extracción de gas, de tal forma que encontrásemos una relación de 2 horas para

[43] Nos referimos a las variables enteras, que desarrollamos en la siguiente sección, en la que se aclarará tanto estas nociones como la distinción respecto al “ratio arbitrario”.

extraer 1L de gas (de media). Considerando estos datos, podríamos concluir que para extraer un total de un litro de gas solo necesitaríamos dos horas de trabajo humano, sin embargo, en cuento añadimos un poco de realismo al problema, nos damos cuenta de que esto es un absurdo. Para sacar el primer litro de gas antes deberíamos construir enormes instalaciones de extracción y transporte que requieren miles de horas de trabajo. Estas inversiones que necesitamos de base para realizar ciertos procesos productivos y que no varían con la cantidad producida son lo que llamamos "costes fijos" y son esenciales en diversos sectores.

- Productividades marginales: como ejemplos de una productividad marginal creciente y decreciente tenemos las economías y deseconomías de escala. Las economías de escala se producen cuando, al aumentar la cantidad producida, los costes medios por unidad producida se reducen (un ejemplo son los conglomerados capitalistas que utilizan esta ventaja en el mercado). Con las deseconomías, por su parte, sucede justo lo contrario. En sectores como la minería o la agricultura, primero se cultivan las zonas más fértiles y con mayor producto por hora trabajada pero, según estas se van acabando, se empieza a hacer uso de tierras menos productivas, dando lugar a una productividad marginal decreciente. En estos casos, si quisiésemos duplicar la producción tendríamos que invertir más del doble de trabajo.

- Variables enteras: una variable entera $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ se distingue de las variables reales $(0.1, -34.3, 1, \pi, \dots)$ que manejamos en la programación lineal, en que no tienen parte decimal. Ejemplos económicos de variables enteras son las fábricas o muchos de los bienes de consumo que se producen. De cara a la planificación, debemos tenerlas en cuenta para que el plan no prevea construir un tercio de fábrica en un sitio dado o medio coche para tal tienda, por ejemplo.

A continuación, veremos las diferentes estrategias que se utilizan para abordar estas dificultades a la hora de calcular un plan factible y aproximadamente óptimo.

3.3.2 Soluciones

Antes de entrar a los tipos de soluciones hay que hacer un apunte acerca de la utilización de estas. Al tener que resolver problemas más allá de la mera planificación lineal, la complejidad computacional lógicamente aumenta, restringiendo más o menos nuestro margen de maniobra [41]. Esto, sin embargo, no nos impide aplicar estos métodos a escalas inferiores a la directamente nacional: las soluciones exactas a los problemas planteados pueden ser encontradas, en la práctica, a otras escalas como la sectorial, la regional o la local.[44] Existe una rica literatura de métodos más complejos

[44] Además del enfoque algorítmico que exponemos en este trabajo, conviene destacar el tratamiento de la complejidad que se ha hecho desde la cibernética. En la URSS de posguerra la modelización de

pero muy útiles que se podrían aplicar en esos casos, rebajando la complejidad computacional mediante aproximaciones y garantizando resoluciones factibles en la práctica. Profundizar en las características de estos es algo que excede lo limites de un artículo introductorio, pero haremos una descripción superficial de algunos ejemplos para que el lector empiece a familiarizarse con los mismos.

Linealización por partes

Para enfrentarnos a funciones no lineales (como las productividades crecientes o decrecientes, por ejemplo) podemos "linealizarlas". Linealizar en matemáticas es elegir una función lineal que se parezca mucho a la original, ya sea localmente (como en el caso de la linealización por partes) o globalmente.

Un ejemplo intuitivo sería el modelo que se usa para la Tierra dependiendo de nuestro objetivo. Todos sabemos que la Tierra es esférica (técnicamente esferoide) y si nos dedicásemos a calcular órbitas de satélites estaríamos obligados a tener en cuenta esta esfericidad. Sin embargo, a la hora de diseñar un edificio o una red de tren, asumimos que la Tierra es plana sin tener en cuenta su esfericidad, porque facilita los cálculos y a esta escala es irrelevante si es una esfera o plana.

Para encontrar un plan aproximadamente óptimo podemos utilizar exactamente el mismo instrumento, considerando que en cada región local de las funciones no lineales hay una función lineal que las aproxima bien (linealización por partes). Esta herramienta se usa en muchos sectores; por ejemplo, podríamos linealizar los costes de producción cuando tenemos unos costes marginales decrecientes, y además se han estimado con cierto error (tenemos una nube de puntos, ver figura 8).

Optimización no convexa

La optimización no convexa se da precisamente cuando tenemos comportamientos de productividad marginal creciente (entre otros) como los de la economía de escala. Esto da lugar a regiones factibles no convexas donde no podemos aplicar los métodos que veníamos usando de programación lineal.[45] Sin embargo, una herramienta que sí que se puede utilizar para resolver este problema es la de inscribir un poliedro convexo P_1 en el interior de la región no convexa P de tal manera que podemos aplicar las

sistemas dinámicos con retroalimentación continua ganó mucha relevancia, precisamente, en el contexto de la planificación a escala regional y local. Como cara visible de esta iniciativa, cabe mencionar al poco conocido grupo de cibernéticos soviéticos del Instituto de Economía de Novosibirisk, Siberia [42].

[45] El mecanismo matemático concreto por el cual este tipo de comportamientos, en ciertos bienes, dan lugar a regiones factibles no convexas involucra las segundas derivadas de sus funciones de producción. Sin embargo, tanto este mecanismo como su traducción en los comportamientos económicos reales se encuentran fuera de los objetivos explicativos de este trabajo.

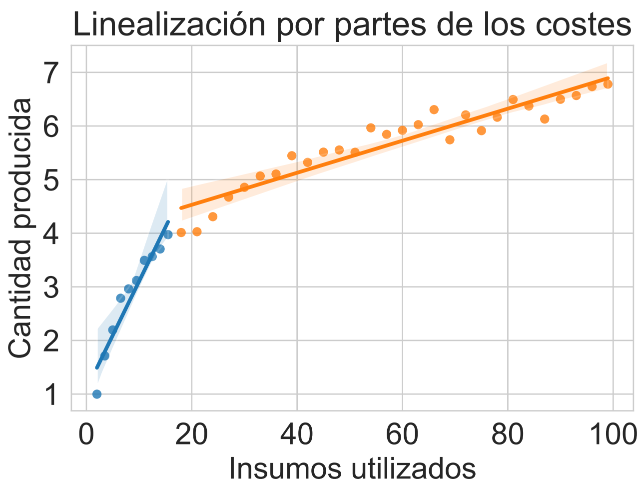


Figura 8: Ejemplo de costes marginales decrecientes. Aproximamos la nube de puntos por dos rectas, según se produzca más o menos cantidad. La zona sombreada nos indica el intervalo de confianza de la aproximación.

herramientas de programación convexa en ella. Al obtener un máximo aproximado x_1 dentro de esa región podemos usarlo para construir una nueva región convexa P_2 que está más cerca de un óptimo de la región no convexa x_l (al menos local) y repetir de nuevo el mismo proceso (ver figura 9). De esa manera, por recurrencia acabaríamos acercándonos (con un pequeño margen de error) a un óptimo [21] (al menos local).

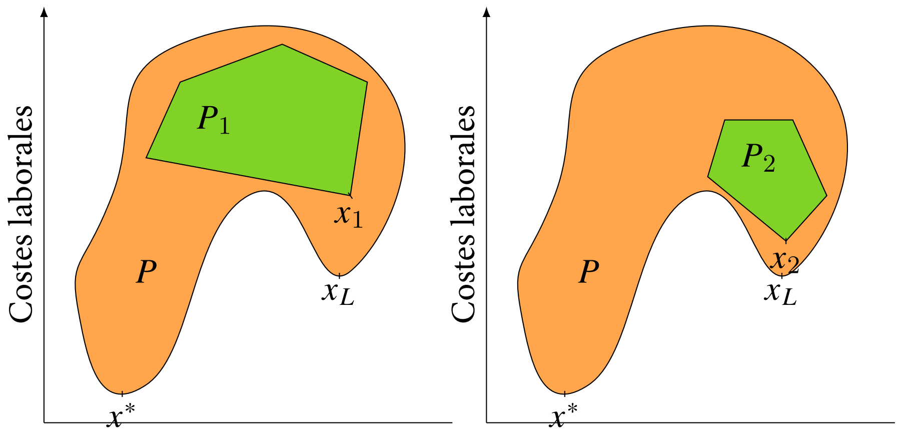


Figura 9: Gráficas representando los dos primeros pasos iterativos del método.

De hecho, es así como funciona, inconscientemente, el mercado capitalista actual: aproximando óptimos por recurrencia. La buena noticia es que en una economía planificada, al tener información de conjunto, no tenemos por qué conformarnos con un óptimo local de la región no convexa, sino que hay diversas herramientas de análisis que permiten encontrar el óptimo de toda la región $x*$. Al tener esta visión de conjunto podríamos ahorrarnos costes y aumentar la eficacia de procesos allí donde el mercado es incapaz por su funcionamiento.

Programación entera mixta

Por su parte, el problema de las variables enteras tiene una solución conocida con el nombre de programación entera mixta (MIP, por sus siglas en inglés). Esta es una variación de la programación lineal a la que se le añade la restricción de que ciertas variables sean enteras. La restricción dificulta considerablemente el problema hasta el punto de precisar de otros algoritmos tales como el "branch and cut". El lector interesado en este tipo de problemas puede consultar [43]. Representamos un problema de MIP en la figura 10.

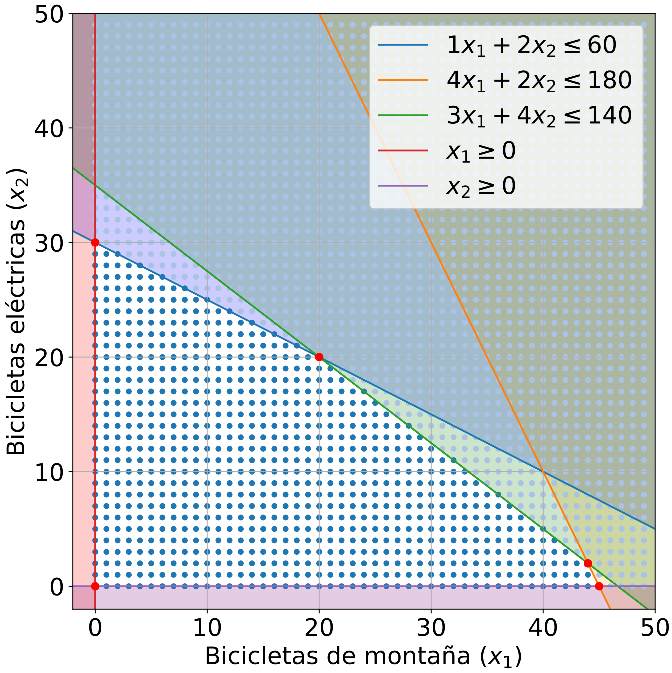


Figura 10: La zona en blanco representa la región factible del problema de programación lineal que aparecía de la Sección 3.2, mientras que los puntos en azul representan la región factible de su correspondiente versión entera, es decir, el problema de las bicicletas imponiendo la condición de que las variables sean números enteros (problema de programación lineal entera).

Inteligencia Artificial (IA)

Otra propuesta para lidiar con no-linealidades es transformar la matriz tecnológica a de tal manera que cada coeficiente, en lugar de ser un simple escalar a_{ij}, sería una función capaz de modelar economías de escala $f_{ij}(x_j)$ [44]. De esta forma, la matriz tecnológica $F(\mathbf{x})$ variaría en función del número de unidades a producir de cada producto j.

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad \longrightarrow \quad (I - F(\mathbf{x}))\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1) & f_{12}(x_1) & \cdots & f_{1n}(x_1) \\ f_{21}(x_2) & f_{22}(x_2) & \cdots & f_{2n}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x_n) & f_{n2}(x_n) & \cdots & f_{nn}(x_n) \end{bmatrix}$$

Para que esta propuesta sea factible para la planificación a gran escala, cada unidad productiva debe ser capaz de modelizar de manera precisa la cantidad de insumos necesarios para producir cada bien en función de las cantidades a producir, por lo que sería preciso generar una cantidad ingente de modelos matemáticos. Gracias a los recientes avances en ciencia de datos e inteligencia artificial, este proceso podría realizarse, hasta cierto punto, de manera automática, ya que estas funciones f_{ij} podrían ser directamente "aprendidas" en función de los datos reales de producción de cada una de las unidades de trabajo, tal y como propone Spyridon Samothrakis en [45].

4 Complejidad computacional

En las secciones anteriores hemos visto cómo la optimización lineal nos es útil para organizar la economía de forma racional y eficiente, sin dinero. L. von Mises sostuvo [46, 47] que esto último era imposible debido a la complejidad de los cálculos involucrados.[46] Los propósitos de esta sección serán, por un lado, definir con precisión qué se entiende por "complejidad de los cálculos involucrados" –lo que llamaremos después *complejidad computacional* asociado con cierto algoritmo– y, por otro, mostrar la complejidad computacional de ciertos algoritmos.

Cuando Mises formuló su famosa crítica a la planificación económica, la palabra *computador* estaba asociada a un empleo y no al objeto utilizado hoy en día para conectarse a Internet, capaz de realizar miles de millones de operaciones aritméticas por segundo. En el caso de la URSS, un computador podría imaginarse como un funcionario del partido sentado en alguna oficina del Gosplan realizando sumas y restas a toda velocidad, lo que conllevaba dos grandes limitaciones: el tamaño del problema a resolver era muy limitado y los errores de cálculo eran la norma. Sin embargo, dichas limitaciones han sido superadas gracias a los computadores actuales, ya que pueden realizar las mismas operaciones sin fallo y a una velocidad inimaginable para un ser humano. En este caso, el cálculo económico racional sería posible al disponer de algoritmos y recursos de computación suficientes para resolver el problema de programación lineal lo suficientemente rápido [48].

4.1 El Concepto de complejidad

El análisis de la *complejidad computacional* es una rama de la algorítmica que precisamente intenta responder a la pregunta de si un problema matemático dado puede resolverse bajo las condiciones tecnológicas actuales. La complejidad de un algoritmo viene dada por la relación entre el número de operaciones aritméticas simples y el número de variables del problema. Por ejemplo, para contar el número de caracteres en una frase (p. ej., la frase '¡A planear!', que tiene 11 caracteres), únicamente se necesita iterar o pasar por cada carácter, comenzando por el primero, y con cada nueva iteración sumar 1 a un contador que originalmente estaba a 0. Cada una de estas dos operaciones, iterar y sumar, son repetidas para cada nuevo carácter, por lo que

[46] En sus propios términos: "Se ha sostenido que en una economía socialista sería posible resolver el problema del cálculo económico mediante la implementación de las ecuaciones, considerando la descripción que hace la economía matemática de las condiciones de equilibrio económico. [...] [Sin embargo] Hayek (1935) estima el orden magnitud del número de ecuaciones y cálculos necesarios como cientos de miles. [...] Es claro que la multiplicidad de datos, y el correspondiente establecimiento de las ecuaciones, es una tarea ardua que va más allá de la planificación central. La imposibilidad práctica de llevar a cabo las propuestas relacionadas con esta o con cualquier solución similar es ciertamente indiscutible" [46].

decimos que esta función tiene una complejidad n, donde n es el número de caracteres en la frase. Para expresar la complejidad del algoritmo utilizamos lo que se llama la notación O-grande, la cual expresa que el número de operaciones del algoritmo es *proporcional* a, pero no exactamente, el número de variables de nuestro problema n. Por lo tanto, decimos que la complejidad de contar los caracteres en una frase es $O(n)$.

Pero, ¿por qué no obtener el número de operaciones exacto? Esto puede ser más complejo de lo que parece a simple vista, ya que depende de muchos factores diferentes, como el procesador en el que se ejecutará el algoritmo, el lenguaje de programación utilizado para implementarlo, cómo de eficiente es la implementación en sí, etc. Por tanto, la notación O grande proporciona una buena aproximación bajo la cual poder agrupar algoritmos según su complejidad sin tener en cuenta todos estos factores.

Decimos que un algoritmo es "factible" o lo suficientemente "rápido" para ser ejecutado en las computadores actuales si pertenece a la clase de algoritmos con complejidad P. La P denota que estos algoritmos pueden resolverse en tiempo (P)olinomial; es decir, que su tiempo de ejecución está acotado por una expresión polinomial del tipo $O(n^k)$ donde k es una constante positiva. Dentro de este grupo, decimos que los problemas de complejidad lineal $O(n)$ (i.e., $k = 1$) son los que tienen el grado de complejidad más bajo, seguidos de cerca por la complejidad logarítmica $O(n\,log(n))$. En el siguiente nivel de dificultad, aunque aún pueden resolverse eficientemente en los computadores actuales, están los problemas con complejidad polinomial de orden mayor que 1 (i.e., $k > 1$), por ejemplo $O(n^2)$ o $O(n^3)$ para $k = 2$ y $k = 3$, respectivamente.

Por otra lado están los problemas de tiempo polinomial no determinístico (conocidos como problemas de complejidad *NP* por su trascripción en inglés *Non-deterministic Polynomial time*), que tienen una complejidad $O(e^n)$.[47] Precisamente decimos que este último grupo de problemas es computacionalmente intratable, ya que el número de operaciones crece exponencialmente con el número de variables, lo cual agotaría rápidamente hasta el computador más rápido. En principio, esta división entre problemas sencillos y complejos puede parecer un poco abstracta, sobre todo cuando no comprendemos exactamente qué significa un logaritmo o la función exponencial. Sin embargo, al comparar las diferentes funciones de complejidad en una misma gráfica, el motivo de esta división queda meridianamente claro, como puede observarse en la Figura 11.

Podemos ilustrar las diferencias entre los problemas de tipo P y NP con un ejemplo. La complejidad de multiplicar dos números primos tiene complejidad baja independientemente del tamaño de dichos números (p. ej., $1180 \cdot 1233 = 1.454.940$ y

[47] El número de Euler e es aproximadamente 2,718.

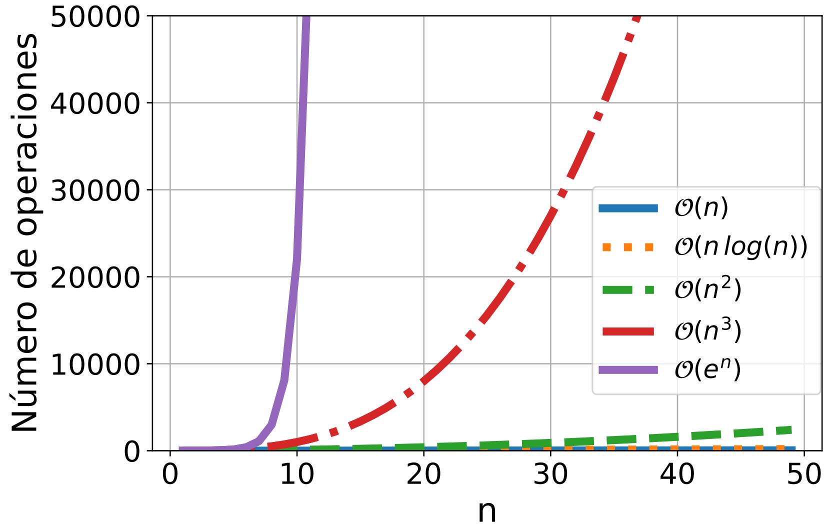


Figura 11: Evolución de la complejidad computacional en función de n.

$1 \cdot 2 = 2$ implican "una única" multiplicación).[48] Sin embargo, si propusiéramos el problema inverso, es decir, encontrar los dos números primos que multiplicándolos dan cierto número, puede llegar a parecer un problema sencillo a pequeña escala (p. ej., $15 = 3 \cdot 5$), pero se vuelve extremadamente complicado conforme los números se hacen ligeramente más grandes (p. ej., ¿qué dos números primos dan como resultado 8.003 al ser multiplicados?[49]). A primera vista, el problema de encontrar los números primos puede parecer poco interesante, pero justamente la criptografía se basa en la dificultad de resolver este tipo de problemas y gracias a ella podemos, por ejemplo, evitar que nuestros datos sean visibles para cualquier persona al transmitirlos cuando nos conectamos a un punto de acceso WiFi.

Parece evidente que los casos lineal, logarítmico y polinomial $O(n^2)$ tienen una complejidad mucho menor que el resto. En el otro extremo está la complejidad exponencial, que extremadamente rápido se aproxima a una evolución casi vertical. Los seres humanos no solemos estar acostumbrados a tratar con tales magnitudes, por lo que el concepto exponencial suele ser poco intuitivo. Quizás con un ejemplo el lector se haga una mejor idea: el número de átomos en el universo conocido[50] se estima que es, en el menor de los casos, 10^{80} (un 1 seguido de 80 ceros). ¡La función exponencial superaría este valor para $n = 185$! En otras palabras, si n fuera el número de artículos en una economía, los algoritmos de complejidad exponencial no podrían ser utilizados ni siquiera para planear una economía familiar. El lector avispado se habrá percatado

[48] La multiplicación de números enteros es de complejidad $O(n \log n)$ desde el 2019. Véase Algoritmos de multiplicación.

[49] Spoiler alert: $8.003 = 53 \cdot 151$

[50] https://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe#Matter_content%E2%80%94number_of_atoms

de que, a primera vista, la complejidad polinomial $O(n^3)$ tendría un comportamiento parecido, solo que crece a un ritmo inferior. ¡Nada más lejos de la realidad! La clave para entender este asunto está en el punto $n = 10$, para el que la complejidad exponencial es diez veces mayor que la polinomial $O(n^3)$. Esta diferencia crecerá de manera *exponencial* con cada incremento de n, por lo que en realidad no son para nada parecidas. Este último tipo de problemas requerirán más tiempo para ser resueltos, pero los computadores actuales aún pueden hacerlo a tal velocidad que podemos decir que son factibles de ejecutar incluso para valores elevados de n.

Una vez presentadas las diferentes complejidades que un algoritmo podría tener, aún falta responder a la pregunta de cómo obtener la complejidad de un algoritmo dado. Este es un ejercicio fundamental para realmente comprender qué es la complejidad computacional. La Sección 2 ha introducido la inversa de la matriz de Leontief como un elemento fundamental para la planificación económica. Por lo tanto, la complejidad que conlleva la inversión de una matriz cuadrada es un ejercicio excelente para comprender la complejidad computacional en el ámbito de la planificación. Para ello, nos vamos a basar en el método Gauss-Jordan[51] para invertir matrices. Es importante resaltar que este método no es el más eficiente de todos, pero su simplicidad lo hace tremendamente didáctico.

4.2 Inversión Matricial: Método Gauss-Jordan

Supongamos una matriz cuadrada A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

que además admite matriz inversa. El método Gauss-Jordan consiste en encontrar las operaciones “elementales”[52] que conviertan la matriz A en la matriz identidad I. Una vez encontradas, dichas operaciones deberán ser aplicadas, en el mismo orden, a la matriz identidad I para así obtener la matriz inversa A^{-1}.

A continuación, exponemos paso a paso las operaciones a realizar para convertir A en I:[53]

1. Dividir la fila 1 por $a_{1,1}$. Operaciones realizadas: 3 divisiones.

[51] https://es.wikipedia.org/wiki/Eliminaci%C3%B3n_de_Gauss-Jordan

[52] Estas operaciones consisten en sumar a una fila múltiplos de otra fila, multiplicar una fila por un escalar no nulo, cambiar filas de orden. El lector interesado en profundizar sobre el álgebra lineal puede consultar, por ejemplo, [49, 50]. Hay cientos de libros buenos que tratan el tema extensivamente.

[53] Podemos suponer que $a_{1,1} \neq 0$ pues al A admitir matriz inversa ninguna columna de A puede tener todas las entradas nulas, por tanto, intercambiando el orden de las filas siempre podemos garantizarlo.

2. Restar a la fila 2 la fila 1 multiplicada por $a_{2,1}$. Operaciones realizadas: 3 multiplicaciones y 3 restas.

3. Restar a la fila 3 la fila 1 multiplicada por $a_{3,1}$. Operaciones realizadas: 3 multiplicaciones y 3 restas.

Después de estos tres primeros pasos, la matriz A ha pasado a ser la matriz A', cuya primera columna es idéntica a la primera columna de I:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix}.$$

4. Dividir la fila 2 por $a'_{2,2}$.[54] Operaciones realizadas: 2 divisiones (recordad que $\frac{0}{a'_{2,2}} = 0$).

5. Restar a la fila 3 la fila 2 multiplicada por $a'_{3,2}$. Operaciones realizadas: 2 multiplicaciones y 2 restas.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & 1 & a''_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix}$$

6. Dividir la fila 3 por $a''_{3,3}$.[55] Operaciones realizadas: 1 división.

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ 0 & 1 & a''_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este punto, la diagonal de la matriz ya tiene todas sus componentes a 1. Ahora solo queda proceder de la misma manera, pero en el sentido inverso.

7. Restar a la fila 2 la fila 3 multiplicada por $a''_{2,3}$. Operaciones realizadas: 1 multiplicación y 1 resta.

[54] Podemos suponer, nuevamente, que $a'_{2,2} \neq 0$ pues ninguna columna de la submatriz obtenida puede tener todas las entradas nulas.

[55] Podemos suponer, nuevamente, que $a'_{3,3} \neq 0$ pues ninguna columna de la submatriz obtenida puede tener todas las entradas nulas.

8. Restar a la fila 1 la fila 3 multiplicada por $a'_{1,3}$. Operaciones realizadas: 1 multiplicación y 1 resta.

9. Restar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por $a'_{1,2}$. Operaciones realizadas: 1 multiplicación y 1 resta.

$$A''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Después de todas estas operaciones, $A''' = I$. En total, este proceso ha requerido un total de 28 operaciones aritméticas simples (6 divisiones, 11 multiplicaciones y 11 restas).[56] Sin embargo, esto es solo para el caso en el que A es una matriz 3×3. Debemos generalizar el cálculo de las operaciones para una matriz arbitraria $n \times n$.

4.3 Inversión Matricial: Complejidad

El método Gauss-Jordan podría verse como un método iterativo en el que cada vez operamos con matrices más pequeñas. Dada la matriz $n \times n$ mostrada abajo y partiendo del primer *pivote* (los pivotes son los elementos en la diagonal que deben pasar a ser 1), el objetivo es hacer 0 todos los elementos en su misma fila y columna, para posteriormente pasara a realizar la misma operación con la matriz $(n-1)\times(n-1)$.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & & \\ a_{3,1} & & \boxed{(n-1)\times(n-1)} & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & & & & \end{bmatrix}$$

Antes de comenzar, como antes, asumimos que A admite inversa[57] y consecuentemente podemos suponer que $a_{1,1} \neq 0$ pues en caso contrario podríamos intercambiar el orden de las filas para garantizarlo.

Para obtener el pivote a 1 es necesario realizar n divisiones (dividir la primera fila por $a_{1,1}$). Para que el primer elemento en cada fila i pase a ser 0, habrá que realizar n multiplicaciones (multiplicar la primera fila por $a_{i,1}$) y n restas (restar los n elementos de la fila i con los de la fila 1). Esta operación hay que repetirla para cada una de las $n-1$

[56] Los cambios de filas en los casos donde el 'pivote' fuera nulo no suponen ningún cambio en la complejidad computacional del algoritmo.

[57] En caso contrario no se podría conseguir el objetivo del algoritmo.

filas. Por último, solo quedaría hacer 0 los $n-1$ elementos restantes en la primera fila. Cada elemento en la columna j pasaría a ser 0 multiplicando el pivote en la columna j por $a_{1,j}$ y restando el resultado a dicha posición en la primera fila. Por lo tanto, esta operación precisará de $n-1$ multiplicaciones y $n-1$ restas. Para calcular el total de operaciones $N(n)$, a las operaciones anteriores habría que sumarle las operaciones necesarias para una matriz $(n-1) \times (n-1)$,[58] resultando en la ecuación (27).

$$N(n) = \underbrace{N(n-1)}_{\text{recursividad}} + \underbrace{n}_{\substack{\text{Divisiones para} \\ \text{hacer 1 el pivote}}} + \underbrace{2 \cdot n \cdot (n-1)}_{\substack{\text{Multiplicaciones y} \\ \text{restas para hacer} \\ \text{0 la columna}}} + \underbrace{2 \cdot (n-1)}_{\substack{\text{Multiplicaciones y} \\ \text{restas para hacer} \\ \text{0 la fila}}} . \tag{27}$$

Los últimos dos sumandos en la ecuación (27) pueden combinarse en un solo término, dando lugar a la expresión $N(n) = N(n-1) + n + 2 \cdot (n^2 - 1)$. Llegados a este punto, tan solo queda continuar con el proceso iterativo:

$$N(n-1) = N(n-2) + (n-1) + 2 \cdot ((n-1)^2 - 1) . \tag{28}$$

En la ecuación anterior, simplemente hemos partido de la ecuación para $N(n)$ y sustituido n por $n-1$, aplicando de este modo el concepto de *recursividad*. De la misma manera, para obtener el número total de operaciones habrá que continuar para $n-2$, $n-3$, etc. hasta llegar a $N(1) = 1$, porque la matriz más pequeña que encontraremos es la matriz 1×1 correspondiente al último pivote, que precisa de una única división para pasar a ser 1. Expresado en notación matemática, la complejidad del método Gauss-Jordan vendrá dada por:

$$C = \sum_{k=1}^{n} [k + 2 \cdot (k^2 - 1)] = \sum_{k=1}^{n} k + 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} 1 . \tag{29}$$

¿Cómo pasamos de C a $O(n^3)$? Por suerte, la ecuación (29) puede ser simplificada utilizando algunos trucos matemáticos. El primero de ellos es bastante evidente: sumar n veces 1 es igual a n. Por otro lado, el primer término de C es lo que se conoce en matemáticas como una *progresión aritmética*, la cual puede ser simplificada de una manera muy original:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n .$$

También puede reescribirse en el sentido inverso:

[58] Cuando se pasa a los sucesivos pivotes, razonaríamos como antes para garantizar que, cambiando filas de orden si fuera necesario, el pivote sea no nulo. En este artículo asumimos que los cambios de filas en los casos donde el pivote fuera nulo no supondrían un cambio en la complejidad computacional.

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1\,.$$

Sumando ambas expresiones obtenemos que $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$ pues hay n sumas de la forma $j + (n - j + 1) = n + 1$. La expresión para $\sum_{k=1}^{n} k^2$ se obtendrá a partir de la fórmula previamente deducida. Por un lado tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1 \tag{30}$$

y por otro lado se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n} [3k^2 + 3k + 1] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \tag{31}$$

Juntando (30) y (31) podemos despejar $\sum_{k=1}^{n} k^2$ y obtener así,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{32}$$

Llegados a este punto, la complejidad del método Gauss-Jordan puede ser reescrita como sigue:

$$C = \frac{n(n+1)}{2} + 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}\,. \tag{33}$$

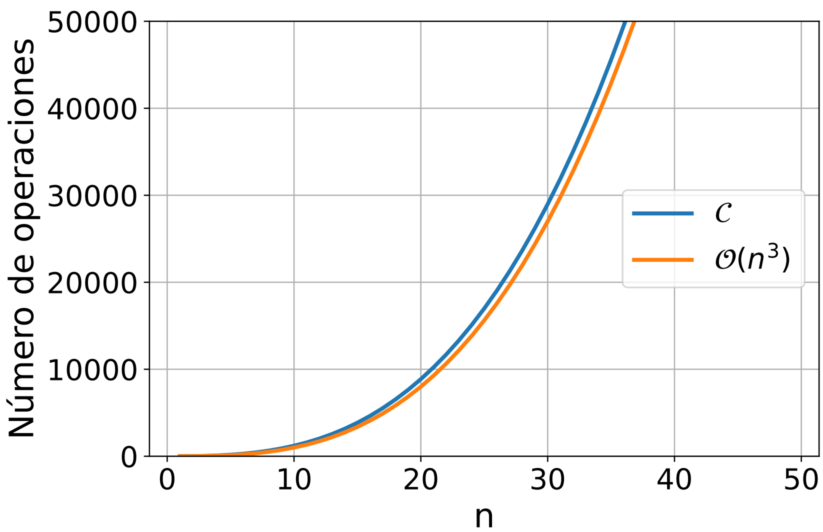


Figura 12: Comparación de la complejidad $O(n^3)$ y número exacto de operaciones del método Gauss-Jordan.

Recomendamos al lector resolver la ecuación (33) para $n = 3$ y comprobar que efectivamente obtiene el mismo resultado calculado para la matriz 3×3 en la sección 4.2.

Llegados a este punto, tan solo queda el último paso para obtener la complejidad en notación O grande. Para n lo suficientemente grande, el elemento de mayor exponente dominará en la expresión obtenida la complejidad total (véase la Figura 12). Por tanto, la complejidad computacional del Método de Gauss-Jordan es $O(n^3)$.

4.4 Complejidad y planificación económica

Una vez comprendido el concepto de complejidad computacional, estamos en disposición de preguntarnos: ¿podría el método simplex ser utilizado para planificar una economía moderna? A lo largo de las últimas décadas, se han planteado diferentes propuestas para resolver los problemas de programación lineal, todas ellas con complejidad polinomial, como se recoge en el cuadro 4. La posibilidad (o imposibilidad) de utilizar dichos algoritmos para planificar una economía dependerá del valor final de n, el número de artículos a producir.

Podemos asumir que, en una economía moderna con altos grados de especialización, el número de productos es proporcional (pero probablemente inferior) al número de habitantes, ya que la elaboración de ciertos productos complejos (p. ej., vehículos, viviendas, computadores, etc.) requieren del trabajo de más de una persona. Por lo tanto, podemos reconocer que un límite superior para el parámetro n sería, siendo generosos, del orden de 10^9, en el caso de intentar planear toda la economía mundial o economías del tamaño de la India o China. Pues bien, desde 2006 ya somos capaces de resolver problemas de tal magnitud en menos de una hora utilizando supercomputadores que ejecutan cálculos en paralelo en miles de procesadores [51].[59] En el caso de problemas más modestos con n del orden de 10^6, los procesadores de 4 núcleos de la mayoría de computadores de sobremesa serían suficiente [53].

Como vemos, el *problema de cálculo económico* en el socialismo, al menos desde el punto de vista técnico, no es irresoluble en absoluto.Tanto los análisis de complejidad computacional como los resultados empíricos demuestran que manejar problemas de optimización del tamaño de las economías actuales es a todas luces factible. Sin embargo, hay que advertir que el problema del cálculo económico no se plantea solo en términos *técnicos*, tal y como hemos planteado hasta el momento, sino que también

[59] Las últimas investigaciones en este ámbito han sido llevadas a cabo por Tomas Härdin en [52], donde analiza las capacidades de los supercomputadores actuales para resolver problemas lineales con matrices dispersas (i.e., con la mayoría de entradas a 0), ya que es esperable que los insumos de cada una de las industrias sea un subconjunto pequeño de todos los productos disponibles en una economía, dando lugar a matrices tecnológicas dispersas.

Autor	**Año**	**Complejidad**
Khachiyan	1979	$\mathcal{O}(n^6)$
Karmarkar	1984	$\mathcal{O}(n^{3,5})$
Renegar	1988	$\mathcal{O}(n^{2,873})$
Vaidya	1989	$\mathcal{O}(n^{2,5})$
Lee y Sidford	2015	$\mathcal{O}(n^{2,5})$
Cohen, Lee y Song	2020	$\mathcal{O}(n^{2,373})$

Cuadro 4: Complejidad computacional de los diferentes algoritmos propuestos para el método simplex [54].

tendría un carácter puramente *económico*, relacionado con la valoración y decisión humana sobre los fines y los medios de la actividad productiva [48, 55]. Es precisamente en este último punto donde se enfoca parte de la crítica austriaca actual a la economía planificada y es por ello que, desde CibCom, tratamos a este tema como una de las claves para para volver a poner la planificación socialista en el tablero.

5 Conclusiones

Una gran parte de los problemas de la planificación económica ensayada en los denominados "países del socialismo real" son subsanables hoy mediante un adecuado uso de ciertos instrumentos matemáticos y computacionales modernos. Pese a lo intrincado que puede ser acercarse a estos en un principio, es posible realizar una acercamiento pedagógico a los mismos, permitiéndonos apreciar sus implicaciones prácticas. La problemática económica, resumida en la introducción en la terna "Logística, Desarrollo, Viabilidad", recibe una respuesta clara, coherente y sólida desde el programa ciber-comunista.

Centrándonos en la primera cuestión, la intención es gestionar las cuestiones logísticas de manera más precisa y eficiente que los mercados capitalistas y sus mecanismos: la competencia disciplinaria entre capitales independientes y la rentabilidad monetaria como incentivo generalizado unidimensional. Además, se pretende hacer esto evitando los mencionados vicios de la primeriza economía soviética; principalmente, el planificar el número de bienes de cada tipo intentando anticipar o predecir las necesidades ciudadanas. ¿Qué enseñanza podemos sacar de esto? ¿Cuales son las exigencias que se derivan de nuestro desarrollo?

1. La tasación de los bienes debe guardar *proporcionalidad con los costes sociales* y considerar orgánicamente la escasez de los recursos naturales.

2. La planificación debe establecerse en relación a las necesidades efectivamente expresadas en una pluralidad de instancias sociales, formando un *sistema de retroalimentación entre la Administración y sus distintas ramificaciones* a diferentes escalas.[60]

3. Es necesario un *sistema contable universal alternativo* para poder representar u homogeneizar distintos manojos de bienes con una única unidad común. Si no somos capaces de utilizar uno no monetario, el uso del dinero prevalecerá, con todos los problemas que ello conlleva.

Pues bien, empezando por esto último, el ciber-comunismo contempla a los denominados *costes laborales integrados* como la única magnitud capaz de asumir esa función. Las ventajas que nos aportan estos son, básicamente, dos. La primera y más evidente es que, incorporados dentro una *metodología insumo/producto*, sientan los cimientos para elaborar planes económicos de gran detalle. Durante el proceso que

[60] Tal y como intentaremos explicar en los próximos tiempos, desde el ciber-comunismo, "la democracia [directa] es importante, no [solo] por razones morales, sino por ser capaz de capturar, de forma detallada y en la mayor cantidad posible, información sobre la demanda, así como de captar buenas ideas que actualmente son ignoradas por el sistema de mercado" [56].

nosotros hemos precisado para calcular los CLI de cada tipo de bien, hemos necesitado determinar cuantas unidades de cada tipo de bien son necesarios para producir una unidad de cualquier otro bien. Es gracias a esto que podemos llevar a cabo nuestra estrategia básica de planificación: determinar a partir de la *matriz tecnológica* la cantidad de unidades de cada tipo de bien que son necesarios producir para satisfacer una *demanda final en constante actualización*. Como hemos visto, para ello solo se necesita calcular la matriz inversa de Leontief.

La segunda ventaja es algo que solo hemos mencionado de puntillas: los CLI permiten establecer un sistema de compensación alternativo a los salarios tal y como los conocemos, basado en *bonos o créditos laborales*. Este permite adquirir ciertos tipos de bienes de consumo en tiendas públicas sin problemas de desequilibrios persistentes entre oferta y demanda efectiva (descritos en el Apéndice A). Para informarse sobre esta propuesta recomendamos leer [10].

En cualquier caso, la fórmula del éxito de la organización ciber-comunista de la logística es la socialización de la actividad económica; una *centralización administrativa* que nos permita saber y movilizar los recursos disponibles democráticamente, superando la opacidad informacional constitutiva de la propiedad privada.

En otro orden de cosas, encontraríamos la problemática del desarrollo. En toda economía avanzada con múltiples industrias y técnicas de producción para cada uno de los productos, es necesaria una *función de distribución* de recursos entre las diferentes tareas económicas. En las sociedades capitalistas, esta función la llevan a cabo el mercado, con sus desastrosas crisis periódicas derivadas de la competencia, y la función empresarial, con la falta de control democrático de la economía que esto implica. En su lugar, proponemos la expropiación de los medios de producción y su gestión colectiva mediante herramientas de optimización matemática para la ejecución de las decisiones económicas adoptadas. La optimización permite maximizar o minimizar cierta función objetivo, como podrían ser la cantidad de trabajo en una sociedad o el CO_2 emitido, teniendo en cuenta los límites biofísicos del sistema (cantidad de materias primas consumidas, horas de trabajo disponibles, etc.). Utilizando este enfoque alternativo conseguimos una mayor eficiencia, ya que se estarían tomando decisiones óptimas dado cierto nivel tecnológico, y, a su vez, permitimos un control democrático sobre la economía, ya sea mediante plebiscitos o mediante el consumo de la población reflejado en la demanda.

La metodología básica presentada para dar respuesta a estos problemas es la *programación lineal*, consistente en optimizar funciones lineales en un poliedro convexo. Como hemos podido apreciar, esta es increíblemente versátil. La familia de problemas, tanto microeconómicos como macroeconómicos, que pueden ser formalizados como problemas de programación lineal es extensísima.

No obstante, como puede intuirse, la joya de la corona de la iniciativa ciber-comunista es la promesa de que todas estos cálculos y operaciones son computables en un tiempo razonable y con la suficiente aproximación; en otras palabras, que responde al denominado problema de la viabilidad.

La idea de que esto es imposible, de que no se puede resolver el problema del cálculo económico democráticamente, es apreciable en casi todos los rincones del espectro político. Desde los liberales hasta los socialistas de mercado, pasando por distintas formas de socialdemocracia, encontramos a gente repitiendo los argumentos de la escuela austriaca. Sin embargo, los grandes avances en las últimas décadas en cuanto a algoritmos de optimización más eficientes y computadoras más rápidas parecen indicar todo lo contrario.

Es bien conocido que la programación lineal es fácilmente tratable con computadores mediante algoritmos como el *simplex*. A su vez, problemas no-lineales más específicos tales como los costes fijos, las economías y deseconomías de escala o las variables enteras pueden encontrar respuesta cuando acotamos su escala adecuadamente. Para cada reto, hay propuestas algorítmicas que permiten afrontarlo para poder maximizar las ventajas del plan: linealización por partes, optimización no convexa, programación entera mixta, inteligencia artificial, etc.

Para cerciorarnos sobre esto, este documento ha ofrecido una introducción al análisis de la complejidad computacional, la cual permite analizar de forma sistemática la complejidad, ya sea en forma de recursos computacionales o tiempo de cálculo, de resolver un algoritmo dado. Creemos que toda crítica que se precie al problema del cálculo económico debería partir las herramientas que ofrece el análisis de la complejidad computacional. Los estudios referenciados en este artículo demuestran que, en el estado actual de la técnica, ya somos capaces de resolver problemas de optimización para economías de escala planetaria, por lo que la supuesta imposibilidad del cálculo económico no parece ser tal.

Como broche final, no está de más recalcar que, para facilitar la exposición, el desarrollo ha estado marcado por supuestos simplificadores enumerados en 2.2. Para entrar en detalles y comprobar cómo estas cuestiones pueden tratarse de manera más realista hay que "remangarse" y meter las manos en lo que hoy están haciendo especialistas como Cockshott, Dapprich o Härdin. Lo cual no significa que no tengamos una intención política clara: mostrar, mediante el esclarecimiento de sus aristas más técnicas, la vitalidad del proyecto comunista y las bases sobre las que puede asentarse.

Subrayemos algo que no siempre se explicita: no hay que ser un genio cibernético para descubrir lo "mágico" de este programa de investigación. La gran mayoría de nosotros no tendrá por qué inventar ninguna técnica matemática ni reajustar la complejidad computacional de ningún plan quinquenal. Nuestra iniciativa de divulgarlo con esta profundidad pretende, ante todo, que cada vez más sectores de nuestra clase seamos conscientes de que todo esto existe, que *comprendamos* cuán esperanzador es lo que se insinúa. Este es nuestro mensaje para todos los que sentimos los grilletes del capital: ¡Camaradas, hay posibilidades para nuestra esperada democracia, esa semilla que germinaba lentamente para quien sabe qué futuras cosechas, y cuyos brotes no tardarán en hacer estallar la tierra!

Agradecimientos

Agradecemos encarecidamente la ayuda brindada por todos los camaradas que han hecho posible el perfeccionamiento y desarrollo de este artículo. Esto incluye a nuestros maestros Paul Cockshott, Tomas Härdin, Ian Wright, Dave Zachariah y Fahd Boundi, pero también a los compañeros y las compañeras de CibCom y ADH (Association for the Design of History) que han revisado el mismo en múltiples ocasiones. Vuestro compromiso e influencia os convierte en indiscutibles coautores de esta obra colectiva. Asimismo, agradecemos al artista Igor Savin, cuyo trabajo ha servido como inspiración para la ilustración de la portada.

Sobre CibCom

CibCom es un colectivo interdisciplinar de origen español, pero con proyección a Hispanoamérica, dedicado a la investigación y difusión del emergente ciber-comunismo (acrónimo de nuestro nombre): la propuesta orquestada por Víktor Glushkov y Stafford Beer en la segunda mitad del siglo XX, y desarrollada por Paul Cockshott y Allin Cottrell en las ultimas décadas. Nuestras filas están compuestas por estudiantes y especialistas tanto del mundo de las matemáticas, la física y la ingeniería informática y de telecomunicación, como de la filosofía, la economía y la sociología, que, desde un paradigma marxista, insisten en la necesidad de superar la economía de mercado.

Aspiramos a revitalizar las tradiciones revolucionarias después de décadas de claudicaciones y retrocesos. Creemos que para que el movimiento obrero recobre su potencial transformador debe reafirmar su proyección post-capitalista. Por ello, nos dedicamos, principalmente, a estructurar un cuerpo teórico solido y coherente sobre lo que consideramos el principal dispositivo institucional de un programa político socialista: la planificación democrática de la economía. Debemos volver a desnaturalizar la propiedad privada. El poder obrero debe poder concretarse.

Apéndices

A ¿Por qué los bienes de consumo han de ser tasados en función de los costes laborales integrados?

En esta sección vamos a razonar porqué los desequilibrios persistentes entre la oferta y la demanda de la URSS no fueron ninguna casualidad, sino inevitables, al no mantener ninguna proporcionalidad entre la tasación, la demanda efectiva y los costes laborales integrados (CLI).

Tal y como consideraba K. Marx, por ejemplo en [57], la planificación económica no puede tener otra base que los flujos de tiempo de trabajo entre las diferentes ramas de producción: "Una vez supuesta la producción colectiva, la determinación del tiempo, como es obvio, pasa a ser esencial.[...] Economía del tiempo: a esto se reduce finalmente toda economía.[...] Economía del tiempo y repartición planificada del tiempo del trabajo entre las distintas ramas de la producción resultan siempre la primera ley económica sobre la base de la producción colectiva". Consecuentemente comencemos haciendo explícitas las relaciones intersectoriales que representan flujos de tiempos de trabajo. Vamos a agregar la economía en tres sectores:

(I) La producción de medios de producción.

(II) La producción de medios de consumo individual que son adquiridos en tiendas públicas en contra de certificados de trabajo u otro sistema de retribución.

(III) La provisión de servicios a través de la caja común, es decir, los individuos no utilizan certificados de trabajo u otra forma de retribución social por el trabajo realizado para adquirirlos tales como los hospitales y las escuelas.

Al producto final (en horas de trabajo) del Sector (I) lo denominaremos bienes de producción (incluye madera, acero, cemento, ...etc) y lo denotaremos por m, y denotaremos por M_1, M_2, M_3 al total de los bienes de producción utilizados en el Sector (I), (II) y (III) respectivamente. Sabemos que los bienes de producción se desgastan, asumamos por simplicidad que una fracción δ de las mismas se desgasta cada año. Entonces, para mantener cada sector en estado de reposo necesitamos $\delta M_1, \delta M_2, \delta M_3$ horas de trabajo respectivamente por año. Si m_g es el crecimiento final anual de m tenemos

$$m_g = m - (\delta M_1 + \delta M_2 + \delta M_3)\ . \qquad (34)$$

Supongamos que el total de personas trabajando (denotémoslo por P) se divide en P_1, P_2, P_3 personas trabajando respectivamente en el Sector (I), (II) y (III). Para hacer esta sección lo más general posible podemos asumir cualquier sistema de retribución que sea uniforme y ubicuo en el cual el resto de costes sean expresados y con el cual poder adquirir los bienes del Sector (II), como lo fue el rublo en la URSS, la unidad monetaria en la URSS.[61] Una vez fijado el sistema de retribución, todos los flujos de trabajo han de expresarse en dicha unidad común pues en caso contrario no hay manera alguna de coordinar los diferentes sectores de la economía, es decir, se convierte en la unidad contable sobre la cuál la planificación económica se asienta.

Por simplicidad asumamos que todas las jornadas laborales son iguales. Denotemos por w el sueldo de cada trabajador[62] en el sistema de retribución elegido. Al total de costes expresados en la unidad contable elegida de m lo llamaremos c. Denotemos por C_1, C_2, C_3 a los costes contables respectivos de cada sector. Puesto que cada sector tiene como gastos los bienes de producción desgastados y los sueldos de las personas trabajando allí tenemos las siguientes ecuaciones:

$$C_1 = c\delta M_1 + wP_1 \,, \tag{35}$$

$$C_2 = c\delta M_2 + wP_2 \,, \tag{36}$$

$$C_3 = c\delta M_3 + wP_3 \,. \tag{37}$$

Denotaremos por b al producto final del Sector (II) (en horas trabajadas) y por p a la cantidad de unidades contables que b representa. Por simplicidad asumimos que las personas no son capaces de acumular unidades contables al final de cada año; informalmente, que no ahorran. Si t es la tasa de impuesto sobre la renta tenemos

$$pb = w(P_1 + P_2 + P_3)(1 - t) \,. \tag{38}$$

Hasta aquí c era una variable completamente independiente del resto, sin embargo, la manera correcta de definir c es dividiendo los costes contables del Sector (I) entre el número de horas de trabajo que el producto final del mismo sector encarna, formalmente:

$$c = C_1/m \,. \tag{39}$$

Los impuestos totales recaudados y los “beneficios” netos del Sector (II) son lo que financia la acumulación neta de nuevos bienes de producción y los costes contables del Sector (III),[63] es decir, tenemos

$$cm_g + C_3 = tw(P_1 + P_2 + P_3) + pb - C_2 \,. \tag{40}$$

Así, tenemos 8 variables libres $m_g, c, w, t, p, C_1, C_2, C_3$ y 7 ecuaciones que constriñen nuestras opciones. Si los ingresos públicos dependen exclusivamente de los impuestos,

[61] Nosotros no obstante, proponemos abolir el dinero y adoptar los certificados de trabajo como unidad de retribución, pero por no perder generalidad tratamos otros casos.

[62] Todas las horas de trabajo se remuneran de la misma manera.

[63] En el capitalismo esto no es cierto pues hay que añadir el consumo personal de los capitalistas.

entonces los precios sectoriales han de corresponderse con los costes laborales integrados. Por el contrario, si los impuestos recaudados por de la Administración no son suficientes para financiar los servicios públicos (Sector III), entonces los precios de los bienes de consumo (Sector II), tienen que ser más elevados que los costes laborales integrados, acarreando un efecto inflacionario.

Hasta aquí sólo hemos hablado de las relaciones intersectoriales que han de verificarse en cualquier economía, ahora analicemos las restricciones intrasectoriales. Incluso asumiendo que la población se mantiene constante, el consumo individual es muy variable. ¿Han los precios de cada uno de los productos del Sector (II) corresponderse con sus respectivos costes laborales integrados salvo, a lo sumo, fluctuaciones derivadas de cambios en patrones de demanda? Sí, pues es la única forma en la cual los ajustes que las personas realizan en sus patrones de demanda serían compatibles con la asignación, a priori, de la fuerza de trabajo a cada tipo de artículo.

Veamos esto con un sencillo ejemplo; asumamos que un grupo de bienes de consumo, por ejemplo, las mesas, están extremadamente devaluadas en comparación con otro grupo de bienes, por ejemplo, las botellas de vino. Pongamos que las botellas de vino tienen un precio cercano a su coste laboral integrado mientras que las mesas tienen la mitad de precio que su coste laboral integrado. Los consumidores podrían cambiar parte de su consumo de botellas de vino a mesas. Digamos por ejemplo que deciden reducir su consumo de botellas de vino en lo equivalente a 5 millones de horas de trabajo y gastarlas en su lugar en mesas. Teniendo en cuenta que los precios de las mesas equivalen a la mitad de sus costes laborales integrados, parecería que esas cinco millones de horas de trabajo que van destinadas a consumir mesas (en lugar de botellas de vino) podrían ser suficientes para comprar 10 millones de horas de trabajo de mesas. Sin embargo, incluso si los trabajadores que en el pasado produjeron esas 5 millones de horas de trabajo de botellas de vino fueran transferidos a la producción de mesas, eso no sería suficiente para producir las 10 millones de horas de trabajo demandadas en mesas. Más en general, si los precios no son proporcionales a los costes laborales integrados ni a la demanda efectiva, los cambios en los patrones de los consumidores,[64] implicarían, o bien una demanda demasiado grande para ser satisfecha con el tamaño de la población activa, o bien, en caso de cambiar de un tipo de bien a uno sobre-evaluado, a que una cierta porción de la fuerza de trabajo sea redundante.

Otros problemas que podrían aparecer al subvencionar productos serían, por un lado, la creación de mercados negros, pues por lo mencionado anteriormente aparecería escasez de productos e incluso acaparamiento de dichos productos por parte de ciertos grupos y, por otro lado, existiría una dualidad en los precios de los artículos

[64] Es decir, que pasan de gastar lo equivalente a un cierto número de horas de trabajo en un tipo de artículo a gastarlo en otro tipo de artículo.

subvencionados, al tener su precio real en el extranjero frente a su precio local.

Por tanto, uno de los problemas que la URSS persistentemente enfrentaba era una consecuencia inevitable de las políticas económicas implementadas. La lección es muy sencilla de aprender: debemos poder calcular de manera exacta los costes laborales integrados de todos los tipos de artículos y distribuir los bienes de consumo de las tiendas públicas en contra de lo equivalente a sus costes laborales integrados para poder coordinar de manera satisfactoria la economía sin problemas persistentes de desabastecimientos y sobreproducción.

Referencias

1. Hayek, F. The Use of Knowledge in Society. *The American Economic Review* **35,** 519-30 (4 1945) (vid. pág. 1).
2. IPCC. Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Masson-Delmotte, V. et al. (eds.)]. (2021) (vid. pág. 3).
3. Agencia Estatal de Meteorología (AEMET). Nota Informativa ICOS-España nº1. https://izana.aemet.es/nota-informativa-icos-espana-no1-el-observatorio-de-izana-vuelve-a-registrar-en-mayo-2021-un-maximo-historico-en-la-concentracion-de-dioxido-de-carbono-co2-el-covid-19-no-ha-frenado-el-incremento-d-2 (2021) (vid. pág. 3).
4. Palomino, M. Industria Fabril y Crecimiento Económico de la Unión Soviética: una Mirada desde la Histórica Económica. **21,** 179 (2018) (vid. pág. 4).
5. Stalin, J. *Problemas Económicos del Socialismo en la URSS.* (Ediciones en Lenguas Extranjeras, 1952) (vid. pág. 5).
6. Bettelheim, C. La transición a la economía socialista. 269-272 (1974) (vid. pág. 5).
7. Cockshott, P. y Cottrell, A. A More Critical Look at Market Socialism. (2009) (vid. pág. 5).
8. Wright, I. The Social Architecture of Capitalism. (2004) (vid. pág. 5).
9. Dragulescu, A. y Yakovenko, V. M. Statistical mechanics of money. arXiv: arXiv:cond-mat/0001432 (2000) (vid. pág. 5).
10. Cockshott, P. y Cottrell, A. Valor, mercados y socialismo. https://cibcom.org/valor-mercados-y-socialismo (1997) (vid. págs. 5, 60).
11. O'Neil, J. Cálculo Socialista y Valoración Ambiental: Dinero, Mercado y Ecología. https://cibcom.org/calculo-socialista-y-valoracion-ambiental-dinero-mercado-y-ecologia (2021) (vid. pág. 6).
12. Benanav, A. Cómo fabricar un lápiz. https://cibcom.org/como-fabricar-un-lapiz/ (2020) (vid. pág. 6).
13. Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático.* 3ª edición (McGraw Hill, 1980) (vid. pág. 13).
14. Zhang, Y. Gaussian Elimination and Matrix Inverse. https://www.caam.rice.edu/~zhang/caam335/F14/handouts/gaussian_elimination.pdf (2010) (vid. págs. 13, 15).

15. Leontief, W. Quantitative Input and Output Relations in the Economic Systems of the United States. *The Review of Economics and Statistics* **18,** 105-125 (3 1936) (vid. pág. 17).

16. Leontief, W. *Input-Output Economics.* (Oxford University Press, 1986) (vid. pág. 17).

17. Leontief, W. Domestic Production and Foreign Trade; The American Capital Position Re-Examined. *Proceedings of the American Philosophical Society* **97,** 332-349 (4 1953) (vid. pág. 17).

18. Cockshott, P. y Cottrell, A. Calculation, Complexity y Planning: The Socialist Calculation Debate Once Again. (1993) (vid. pág. 17).

19. Cockshott, W. P. y Cottrell, A. *Towards a new socialism.* (Spokesman, Nottingham, England, 1993) (vid. págs. 17, 27).

20. Cockshott, P. Input-output or Harmony planning. https://paulcockshott.wordpress.com/2019/05/14/input-output-or-harmony-planning/ (2019) (vid. pág. 17).

21. Härdin, T. La solución del cálculo económico [6]: Programación entera mixta. https://cibcom.org/la-solucion-del-calculo-economico-6 (2022) (vid. págs. 17, 45).

22. Farjoun, E. *The Production of Commodities by Means of What?* en *Ricardo, Marx and Sraffa; The Langston Memorial Volume.* (1984), 11-43 (vid. pág. 18).

23. Farjoun, E., Machover, M. y Zachariah, D. How Labor Powers the Global Economy: A Labor Theory of Capitalism. (2022) (vid. pág. 18).

24. Cockshott, P. y Zachariah, D. Classical labour values – properties of economic reproduction. *World Review of Political Economy* (2018) (vid. pág. 18).

25. Shaikh, A. y Antonopoulos, R. *Explaining long term exchange rate behavior in the United States and Japan.* (Routledge, 2013) (vid. pág. 18).

26. Nápoles, P. R. *Costos unitarios laborales verticalmente integrados por rama en México y Estados Unidos, 1970–2000.* (Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Economía, 2010) (vid. pág. 18).

27. Morishima, M. *Equilibrium stability, and growth: a multi-sectoral analysis.* Reprint. with corr. 227 págs. (Clarendon Press, Oxford, 1978) (vid. págs. 22, 26).

28. Morishima, M. *Marx's economics: a dual theory of value and growth.* Reprinted. 198 págs. (Cambridge Univ. Pr, Cambridge, 1977) (vid. págs. 24-26).

29. Horn, R. A. y Johnson, C. R. Matrix Analysis. (2013) (vid. pág. 26).

30. Stoer, J. y Bulirsch, R. Introduction to Numerical Analysis (2002) (vid. pág. 27).

31. Arandiga, F., Donat, R. y Mulet, P. Mètodes Numérics per a l'Àlgebra Lineal (2000) (vid. pág. 27).

32. Ortega, J. y Rheinboldt, W. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables (1970) (vid. pág. 27).

33. Atkinson, K. y Han, W. Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework (2009) (vid. pág. 27).

34. Amat, S. *y col.* Aproximació numèrica (2002) (vid. pág. 27).

35. Phillips, L. y Rozworski, M. *The People's Republic of Walmart: How the World's Biggest Corporations are Laying the Foundation for Socialism.* (Jacobin, 2019) (vid. pág. 30).

36. Nieto, M. Dynamic Efficiency in a Planned Economy: Innovation and Entrepreneurship Without Markets. *Science and society* **84,** 42-66 (1 2020) (vid. pág. 30).

37. Nieto, M. Entrepreneurship and Decentralised Investment in a Planned Economy: A Critique of the Austrian Reading. *Historical Materialism* (2021) (vid. pág. 30).

38. Bazaraa, M. y Jarvis, J. Programación lineal y flujo en redes. (2004) (vid. pág. 36).

39. Kantorovich, L. Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. *Management Science* **6,** 366-422 (4 1939) (vid. págs. 37, 41).

40. Kantorovich, L. The Best Use of Economic Resources. (1965) (vid. pág. 41).

41. Shalizi, C. In Soviet Union, Optimization Problem Solves You. www.crookedtimber.org/2012/05/30/in-soviet-union-optimization-problem-solves-you/ (2012) (vid. pág. 43).

42. West, D. K. Cybernetics for the command economy: Foregrounding entropy in late Soviet planning. *History of the Human Sciences* **33,** 36-51 (1 2020) (vid. pág. 44).

43. Schrijver, A. *Theory of linear and integer programming* (John Wiley & Sons, 1998) (vid. pág. 46).

44. Fujimoto, T. Non-linear Leontief models in abstract spaces. *Journal of Mathematical Economics* **15,** 151-156 (1986) (vid. pág. 46).

45. Samothrakis, S. Artificial Intelligence inspired methods for the allocation of common goods and services. *Plos one* **16,** e0257399 (2021) (vid. pág. 47).

46. Von Mises, L. Las ecuaciones de economía matemática y el problema del cálculo económico en un estado socialista. *Ensayos de Economía* **26,** 229-234 (2016) (vid. pág. 49).

47. Von Mises, L. *Economic calculation in the socialist commonwealth.* (Lulu Press, Inc, 2016) (vid. pág. 49).

48. Cockshott, P. Von Mises, Kantorovich and in-natura calculation. *European Journal of Economics and Economic Policies: Intervention,* 167 (2010) (vid. págs. 49, 58).

49. Gockenbach, M. S. *Finite-dimensional Linear Algebra.* (CRC Press, 2010) (vid. pág. 52).
50. Axler, S. *Linear Algebra Done Right.* third edition (2015) (vid. pág. 52).
51. Gondzio, J. y Grothey, A. *Solving nonlinear financial planning problems with* 10^9 *decision variables on massively parallel architectures.* en *Computational Finance and its Applications II.* **43** (2006), 95 (vid. pág. 57).
52. Härdin, T. Towards large scale linear planning. https://www.xn--hrdin-gra.se/blog/2022/02/04/towards-large-scale-linear-planning (2022) (vid. pág. 57).
53. Bienstock, D. Potential Function Methods for Approximately Solving Linear Programming Problems: Theory and Practice. (2001) (vid. pág. 57).
54. Härdin, T. La solución del cálculo económico [1]. Cibernética, política y álgebra lineal dispersa. https://cibcom.org/la-solucion-del-calculo-economico-hardin1 (2022) (vid. pág. 58).
55. Nieto, M. en *Ciber-comunismo: planificación económica, computadoras y democracia.* 231 (2017) (vid. pág. 58).
56. Härdin, T. Prices and information. http://www.xn--hrdin-gra.se/blog/2021/11/14/prices-and-information/ (2021) (vid. pág. 59).
57. Marx, K. *Elementos Fundamentales para la Crítica de la Economía Política (Grundrisse): I.* Vigésima edición (Siglo XXI editores, 2007) (vid. pág. 65).